UNIVERSITÉ DE RENNES 1

AP1 - Analyse et Probabilités

Contrôle du vendredi 17 décembre 2021

Durée : 2 heures

Ce sujet est composé de cinq exercices totalement indépendants. Le barème est indicatif.
La clarté et la précision des raisonnements, la qualité de la rédaction interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice n°1 (*7 points*)

Préciser si chacune des propositions suivantes est vraie ou fausse, puis justifier la réponse. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

1) On lance une pièce équilibrée deux fois. On note D l'évènement : « La pièce tombe sur deux côtés différents » et A l'évènement : « La pièce tombe au plus une fois sur le côté face. »
PROPOSITION : *Les évènements D et A sont indépendants.*

2) On lance cinq fois un dé équilibré (six faces équiprobables numérotées de 1 à 6).
PROPOSITION : *La probabilité d'obtenir exactement une fois la face « 6 » est égale à* $\dfrac{5}{6}$.

3) Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels qui converge vers le réel ℓ.
PROPOSITION : *La suite $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(\ell)$.*

4) On note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de nombres réels définie par $u_0 = 1$ et, pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + e^{-u_n}$.
PROPOSITION : *La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.*

5) PROPOSITION : *L'équation* $\dfrac{1}{2}\cos x - \dfrac{1}{(x+1)^2} = 0$ *admet au moins une solution réelle.*

6) Soit f la fonction définie sur $]-1,1[$ par $f(x) = \sqrt{1-\cos(x^2)}$.
PROPOSITION : *La fonction f est dérivable sur $]-1,1[$.*

Exercice n°2 (*2 points*)

Combien de mots de sept lettres peut-on former avec les lettres A, B, C, D, E, F, G, en les utilisant toutes ?
Combien y a-t-il de ces mots où les lettres B, A, C se suivent :

- Dans cet ordre ?
- Dans un ordre quelconque ?

Exercice n°3 (*4 points*)

On considère deux urnes : la première contient six boules rouges et trois noires, l'autre six noires et trois rouges (toutes indiscernables au toucher). On choisit une urne au hasard puis on y tire deux boules (simultanément). On obtient deux rouges. Quelle est la probabilité qu'on ait choisi la première urne ?

Tournez la page S.V.P.

$\boxed{\textbf{Exercice n°4}}$ *(4 points)*

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs, strictement décroissante et convergeant vers 0.

Pour tout entier naturel n, on note $S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k$.

1) Démontrer que les suites $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes. Que peut-on en déduire ?

2) On note $\ell = \lim_{n\to+\infty} S_n$. Prouver que : $\forall n \in \mathbb{N},\ |S_n - \ell| \leqslant a_{n+1}$.

$\boxed{\textbf{Exercice n°5}}$ (*3+2 points*)

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie, pour $n \geqslant 1$, par $u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{n!}$.

Soit n un entier naturel fixé ($n \geqslant 1$).

Soit $f : [0;1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto f(x) = e^{-x}\left(1 + \frac{x}{1!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}\right)$.

1) Montrer que f est dérivable sur $[0,1]$ et que : $\forall x \in [0,1],\ |f'(x)| \leqslant \frac{1}{n!}$.

2) En déduire que $\left|\frac{1}{e}u_n - 1\right| \leqslant \frac{1}{n!}$. Qu'en déduit-on pour la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$?

3) *(Bonus)* On pose $v_n = u_n + \frac{1}{n.n!}$. Montrer que $u_n < e < v_n$. *(On pourra étudier la monotonie des suites (u_n) et (v_n).)*