PRA1 - Probabilités - Analyse : corrigé rapide du contrôle continu

Exercice n°1 *(2,5 points)*

1) Non car on aurait alors $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ ce qui est absurde puisque $\forall x < 0,\ f(x) \geqslant f(0)$. Par suite, $\exists x_1 \in \mathbb{R},\ f(x_1) - x_1 \geqslant 0$.
Autre méthode : Par l'absurde. On suppose $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) < x$.
Soit $y \in \mathbb{R}$. Posons $x = f(y)$. On a alors $f(y) < y$ soit $x < y$; or $f(x) < x$ soit $f(x) < f(y)$. Cela contredit la décroissance de f.

2) De même, $\exists x_2 \in \mathbb{R},\ f(x_2) - x_2 \leqslant 0$. La fonction continue $g : x \longmapsto f(x) - x$ prend donc, sur $\mathbb{R}$, une valeur positive et une valeur négative : elle s'annule donc (théorème des valeurs intermédiaires).

3) Oui, ce point fixe est unique. En effet, g est strictement décroissante donc ne peut pas s'annuler plus d'une fois.

Exercice n°2 *(4,5 points)*

1) On a $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + x^2\varepsilon(x)$ avec $\lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$. On a également $\ell n\,(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + x^2\varepsilon(x)$ avec $\lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$. On en déduit $\ell n\ (1+\sqrt{1+4x}) = \ell n\,(2+2x-2x^2+x^2\varepsilon(x)) = \ell n\,(2) + \ell n\,(1+x-x^2+x^2\varepsilon(x))$ puis, par composition (puisque $X = x - x^2 \xrightarrow[x\to 0]{} 0$),

$$\ell n\ \left(1+\sqrt{1+4x}\right) = \ell n\,(2) + \left(x - x^2\right) - \frac{1}{2}\left(x-x^2\right)^2 + x^2\varepsilon(x) = \ell n\,(2) + x - \frac{3}{2}x^2 + x^2\varepsilon(x)$$

2) Puisque $\lim_{x\to 0} \ell n\ \left(1+\sqrt{1+4x}\right) + a - \sin x = \ell n\, 2 + a$, trois cas sont possibles :

- ou bien $a > -\ell n\, 2$ et on a immédiatement $\lim_{x\to 0} \frac{\ell n\ (1+\sqrt{1+4x}) + a - \sin x}{x^2} = +\infty$,
- ou bien $a < -\ell n\, 2$ et on a immédiatement $\lim_{x\to 0} \frac{\ell n\ (1+\sqrt{1+4x}) + a - \sin x}{x^2} = -\infty$,
- ou bien $a = -\ell n\, 2$. Sachant que $\sin x = x + x^2\varepsilon(x)$ avec $\lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$, on écrit un développement limité à l'ordre 2 du numérateur : $\ell n\ (1+\sqrt{1+4x}) + a - \sin x = -\frac{3}{2}x^2 + x^2\varepsilon(x)$. Après simplification par x^2, on en déduit : $\lim_{x\to 0} \frac{\ell n\ (1+\sqrt{1+4x}) + a - \sin x}{x^2} = -\frac{3}{2}$.

Exercice n°3 *(4,5 points)*

1) Soit $n \geqslant 1$. On a $|u_n| \leqslant \frac{1}{(n+2)\sqrt{n} - 1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$. Or $\sum \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ converge (série de Riemann avec $\frac{3}{2} > 1$), la série $\sum u_n$ converge donc absolument (théorème d'équivalence puis théorème de comparaison pour les séries positives) et donc aussi simplement.

2) Soit $n \geqslant 1$. On a $X = \frac{(-1)^n}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et $e^X - 1 \underset{X\to 0}{\sim} X$ donc $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{(-1)^n}{n+1}$ puis $|v_n| \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$.
Comme $\sum \frac{1}{n}$ diverge (série harmonique), $\sum v_n$ ne converge donc pas absolument (théorème d'équivalence pour les séries positives).
Le développement limité en 0 de $X \mapsto e^X$ à l'ordre 2 est : $e^X = 1 + X + \frac{1}{2}X^2 + X^2\varepsilon(X)$ avec $\lim_{X\to 0}\varepsilon(X) = 0$ donc $v_n = \frac{(-1)^n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2}\left(\frac{1}{2} + \varepsilon(n)\right)$ avec $\lim_{n\to+\infty}\varepsilon(n) = 0$

- $\sum \frac{(-1)^n}{n+1}$ converge d'après le critère spécial aux séries alternées (c'est une série alternée et la suite $\left(\left|\frac{(-1)^n}{n+1}\right|\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et converge vers 0),

- $\dfrac{1}{(n+1)^2}\left(\dfrac{1}{2}+\varepsilon(n)\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{n^2}$ et $\sum \dfrac{1}{n^2}$ converge donc $\sum \dfrac{1}{(n+1)^2}\left(\dfrac{1}{2}+\varepsilon(n)\right)$ converge.

La série $\sum v_n$ converge donc comme somme de deux séries convergentes.

Exercice n°4 *(2,5 points)*

1) Un résultat peut être vu comme une partie à cinq éléments de l'ensemble des huit boules (boules que l'on peut noter $j_1, j_2, j_3, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5$). Ces boules étant indiscernables, on munit l'ensemble Ω de ces parties de la probabilité uniforme $\mathbb{P}$. On remarque que $\mathrm{Card}(\Omega) = \binom{8}{5} = 56$.

2) Un élément ω de Ω est dans A si et seulement s'il est réunion (disjointe) d'une partie à deux éléments de $\{j_1, j_2, j_3\}$ et d'une partie à trois éléments de $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$.

3) On a donc $\mathrm{Card}(A) = \binom{3}{2}.\binom{5}{3} = 30$ et par suite $\mathbb{P}(A) = \dfrac{30}{56} = \dfrac{15}{28}$.

Exercice n°5 *(4,5 points)*

1) On a $A = A\cap\Omega = A\cap(B\cup\overline{B})$ donc $A = (A\cap B)\cup(A\cap\overline{B})$. Cette réunion étant disjointe, par axiome de probabilité $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A\cap B) + \mathbb{P}(A\cap\overline{B})$. Or, par définition des probabilités conditionnelles, puisque $\mathbb{P}(B)\neq 0$ et $\mathbb{P}(\overline{B}) = 1-\mathbb{P}(B)\neq 0$, $\mathbb{P}_B(A) = \dfrac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(B)}$ et $\mathbb{P}_{\overline{B}}(A) = \dfrac{\mathbb{P}(A\cap\overline{B})}{\mathbb{P}(\overline{B})}$.

On a donc bien $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}_B(A).\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}_{\overline{B}}(A).\mathbb{P}(\overline{B})$.

2) Considérons les événements : P : « le dé est pipé », S : « on obtient 6 » et T :« on obtient 3 ».

a) D'après la question précédente, $\mathbb{P}(S) = \mathbb{P}_P(S).\mathbb{P}(P) + \mathbb{P}_{\overline{P}}(S).\mathbb{P}(\overline{P})$. Or on a $\mathbb{P}(P) = \dfrac{20}{50} = \dfrac{2}{5}$ (donc $\mathbb{P}(\overline{P}) = \dfrac{3}{5}$), $\mathbb{P}_P(S) = \dfrac{1}{3}$ par hypothèse et $\mathbb{P}_{\overline{P}}(S) = \dfrac{1}{6}$ (probabilité d'obtenir le 6 en lançant un dé équilibré). On a donc $\mathbb{P}(S) = \dfrac{1}{3}.\dfrac{2}{5} + \dfrac{1}{6}\dfrac{3}{5} = \dfrac{7}{30}$.

b) On cherche à calculer $\mathbb{P}_T(\overline{P}) = \dfrac{\mathbb{P}(T\cap\overline{P})}{\mathbb{P}(T)} = \dfrac{\mathbb{P}_{\overline{P}}(T).\mathbb{P}(\overline{P})}{\mathbb{P}_P(T).\mathbb{P}(P) + \mathbb{P}_{\overline{P}}(T).\mathbb{P}(\overline{P})}$. Or $\mathbb{P}_{\overline{P}}(T) = \dfrac{1}{6}$ (probabilité d'obtenir le 3 en lançant un dé équilibré) et $\mathbb{P}_P(T) = \dfrac{2}{15}$: en effet, 1, 2, 3, 4 et 5 ont même probabilité p d'apparaître et la probabilité d'obtenir 6 est $\dfrac{1}{3}$ donc (axiome de totalité) $5p + \dfrac{1}{3} = 1$ soit $p = \dfrac{2}{15}$.
On a donc

$$\mathbb{P}_T(\overline{P}) = \frac{\frac{1}{6}.\frac{3}{5}}{\frac{2}{15}.\frac{2}{5} + \frac{1}{6}.\frac{3}{5}} = \frac{15}{23}$$

Exercice n°6 *(5 points)*

1)a) Un résultat peut être vu comme une k-liste de $\{1,2,3\}$. Les tirages ayant lieu au hasard et avec remise, on peut munir l'ensemble Ω de ces k-listes (de cardinal 3^k) de la probabilité uniforme $\mathbb{P}$.

b) On a alors $A_1 = \{(x_1,\cdots,x_{k-1},1),\ \forall i\in[\![1,k-1]\!],\ x_i\in\{2,3\}\}$ et $C_1 = A_1\backslash\{(2,\cdots,2,1),(3,\cdots,3,1)\}$. On en déduit $\mathrm{Card}(A_1) = 2^{k-1}$ (nombre de $(k-1)$-listes de $\{2,3\}$) et $\mathrm{Card}(C_1) = 2^{k-1}-2$ ce qui conduit à $\mathbb{P}(A_1) = \dfrac{2^{k-1}}{3^k}$ et $\mathbb{P}(C_1) = \dfrac{2^{k-1}-2}{3^k}$.

2) Conservons les notations de la question précédentes (en les étendant). La variable aléatoire X prend ses valeurs dans $\mathbb{N}\backslash\{0,1,2\}$ et pour $k\in\mathbb{N}\backslash\{0,1,2\}$, on a $[X=k] = C_1\cup C_2\cup C_3$. Les C_i étant deux à deux disjoints, on en déduit $\mathbb{P}([X=k]) = \mathbb{P}(C_1)+\mathbb{P}(C_2)+\mathbb{P}(C_3) = 3\mathbb{P}(C_1)$. La question précédente permet alors de conclure : $\mathbb{P}([X=k]) = \left(\dfrac{2}{3}\right)^{k-1} - 2\left(\dfrac{1}{3}\right)^{k-1}$.

On sait que pour $|a|<1$, $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0} a^k = \frac{1}{1-a}$ et donc (par dérivation) $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1} ka^{k-1} = \frac{1}{(1-a)^2}$. On en déduit que X a une espérence qui est $\displaystyle\mathbb{E}(X) = \sum_{k\geqslant 3} k\mathbb{P}([X=k]) = \frac{1}{(\frac{1}{3})^2} - 2\frac{1}{(\frac{2}{3})^2} - 1 - \frac{2}{3} + 2 + \frac{2}{3}$ soit $\mathbb{E}(X) = \dfrac{11}{2}$.