UNIVERSITÉ DE RENNES 1

PRA1 : Probabilités - Analyse

Contrôle continu du vendredi 16 décembre 2016
Durée : 2h

Les six exercices sont indépendants - Le barème est donné à titre indicatif
La qualité de la rédaction interviendra pour une large part dans l'appréciation de la copie

Exercice n°1 (*2,5 points*)

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et décroissante.

1) Peut-on avoir : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) < x$? *(On justifiera la réponse en exhibant un exemple ou en démontrant que c'est impossible.)*

2) Montrer l'existence d'un réel x_0 tel que $f(x_0) = x_0$.

3) Ce point fixe de f est-il nécessairement unique ? *(On justifiera la réponse en exhibant un contre-exemple ou en démontrant la propriété.)*

Exercice n°2 (*3,5 points*)

1) Donner les développements limités à l'ordre 2 en 0 de $x \longmapsto \sqrt{1+x}$ et de $x \longmapsto \ell n\,(1+x)$.
En déduire le développement limité à l'ordre 2 en 0 de $x \mapsto \ell n\ (1+\sqrt{1+4x})$.

2) Déterminer, en fonction du réel a, la valeur de la limite en 0 de $\dfrac{\ell n\ (1+\sqrt{1+4x}) + a - \sin x}{x^2}$.

Exercice n°3 (*4 points*)

Étudier la convergence simple et la convergence absolue de la série numérique dont le terme général est :

1) $u_n = \dfrac{\cos(n^2)}{(n+2)\sqrt{n}-1}$ **2)** $v_n = e^{\frac{(-1)^n}{n+1}} - 1$

Exercice n°4 (*2,5 points*)

Une urne contient trois boules jaunes et cinq boules vertes indiscernables au toucher. On tire simultanément cinq boules dans cette urne.

1) Donner, en le justifiant, un espace de probabilité $(\Omega, \mathbb{P})$ modélisant cette expérience.

2) On note A l'événement « On obtient deux boules jaunes et trois boules vertes ». Décrire A à l'aide du modèle de la question précédente.

3) Calculer la probabilité de A.

T.S.V.P.

$\boxed{\textbf{Exercice n°5}}$ *(4 points)*

1) On considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$. Soient A et B deux événements avec $\mathbb{P}(B) \notin \{0, 1\}$. Démontrer que :

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}_B(A).\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}_{\overline{B}}(A).\mathbb{P}(\overline{B})$$

2) On dispose de cinquante dés cubiques : trente sont parfaitement équilibrés et vingt sont pipés de telle sorte que la probabilité d'obtenir 6 soit $\frac{1}{3}$ (les autres numéros ayant tous la même probabilité d'apparaître). On choisit un dé au hasard parmi les cinquante et on le lance.

a) Quelle est la probabilité d'obtenir 6 ?

b) On obtient 3. Quelle est la probabilité que le dé choisi ne soit pas pipé ?

$\boxed{\textbf{Exercice n°6}}$ *(3,5 points)*

Une urne contient trois jetons numérotés $1, 2, 3$ indiscernables au toucher. On effectue une suite de tirages au hasard d'un jeton de cette urne, en replaçant à chaque fois le jeton obtenu, avant le tirage suivant.

1) Dans cette question on suppose que l'on effectue k tirages successifs (où $k \geqslant 3$ est un entier).

a) Donner, en le justifiant, un espace de probabilité $(\Omega, \mathbb{P})$ modélisant cette expérience.

b) On note A_1 l'événement « On obtient le 1 pour la première fois au dernier lancer », B_1 l'événement « On obtient au moins une fois chacun des trois numéros » et $C_1 = A_1 \cap B_1$.
Décrire les événements A_1 et C_1 à l'aide du modèle précédent et en donner les probabilités.

2) On répète les tirages jusqu'à obtenir, pour la première fois, les trois numéros. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de tirages. Déterminer la loi de X. Quelle est son espérance ?