PRA1 - Probabilités - Analyse - Statistiques : Corrigé rapide du contrôle continu

Exercice n°1 (*4 points*)

1) FAUX. En effet, pour $h \neq 0$, on a $\dfrac{f(\frac{1}{2}+h)-f(\frac{1}{2})}{h} = e^{-(1+2h)}\dfrac{|\cos(\frac{\pi}{2}+\pi h)|}{h} = e^{-1-2h}\dfrac{|\sin(\pi h)|}{h}$. Par suite, $\dfrac{f(\frac{1}{2}+h)-f(\frac{1}{2})}{h} \xrightarrow[h\to 0^+]{} \pi e^{-1}$ et $\dfrac{f(\frac{1}{2}+h)-f(\frac{1}{2})}{h} \xrightarrow[h\to 0^-]{} -\pi e^{-1}$. f est donc dérivable à droite et à gauche en $\frac{1}{2}$ mais $f'_g(\frac{1}{2}) \neq f'_d(\frac{1}{2})$: f n'est pas dérivable en $\frac{1}{2}$.

2) VRAI. En effet $\mathbb{P}(A\cup B) = \mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)-\mathbb{P}(A\cap B)$ et $A = A\cap(B\cup\overline{B}) = (A\cap B)\cup(A\cap\overline{B})$. Cette réunion étant disjointe, on a en reportant $\mathbb{P}(A\cup B) = \mathbb{P}(A\cap\overline{B})+\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}_{\overline{B}}(A)\mathbb{P}(\overline{B})+\mathbb{P}(B)$. Comme $\mathbb{P}(\overline{B}) = 1-\mathbb{P}(B) = 0{,}8$ on a finalement $\mathbb{P}(A\cup B) = 0,4\times 0,8+0,2 = 0,52$.

Exercice n°2 (*4,5 points*)

1) Soit $n\in\mathbb{N}^*$. $u_{n+1}-u_n = \dfrac{1}{n+1} > 0$ et donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante. Deux cas sont alors possibles : ou bien la suite est en outre majorée et elle est alors convergente, ou bien la suite n'est pas majorée et elle diverge vers $+\infty$. Elle a donc dans tous les cas une limite.

2) Soit $n\in\mathbb{N}^*$. $u_{2n}-u_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k} \geqslant \sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$. Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ était convergente, en passant à la limite dans l'inégalité précédente (la sous-suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergeant alors vers la même limite), on obtiendrait $0 \geqslant \dfrac{1}{2}$ ce qui est absurde. La suite diverge donc et, d'après 1), $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Exercice n°3 (*3 points*)

1) Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur le segment $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. Alors il existe un réel c dans $]a,b[$ tel que $f(b)-f(a) = (b-a)f'(c)$.

2) Soit $(x,y)\in[a,b]^2$. Supposons $x<y$. f est une fonction continue sur $[x,y]$ et dérivable sur $]x,y[$ donc (théorème des accroissements finis) on peut considérer un c de $]a,b[$ tel que $f(y)-f(x) = f'(c)(y-x)$. L'hypothèse faite sur f' entraîne alors $f(y)-f(x)\geqslant 0$ (car $y-x\geqslant 0$). On a donc montré :

$$\forall (x,y)\in[a,b]^2 \qquad (x<y \Longrightarrow f(x)\leqslant f(y))$$

f est donc croissante sur $[a,b]$.

Exercice n°4 (*4 points*)

1) On a $\cos x = 1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4+x^4\varepsilon(x)$ avec $\displaystyle\lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$. On en déduit $e^{\cos x} = e^{1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4+x^4\varepsilon(x)}$ soit $e^{\cos x} = e.e^{-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4+x^4\varepsilon(x)}$. Comme $e^X = 1+X+\frac{1}{2}X^2+X^2\varepsilon(X)$, on a par composition

$$e^{\cos x} = e\left(1+(-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4)+\frac{1}{2}(-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4)^2\right)+x^4\varepsilon(x) = e-\frac{e}{2}x^2+\frac{e}{6}x^4+x^4\varepsilon(x)$$

2) On écrit un DL à l'ordre 4 du numérateur : $a\left(1+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{8}x^4\right)+e-\frac{e}{2}x^2+\frac{e}{6}x^4+b+x^4\varepsilon(x)$. La quantité proposée admet donc une limite finie si et seulement si $a=e$ et $b=-2e$. On a alors

$$\frac{a\sqrt{1+x^2}+e^{\cos x}+b}{x^4} = \frac{-\frac{e}{8}x^4+\frac{e}{6}x^4+x^4\varepsilon(x)}{x^4} \xrightarrow[x\to 0]{} \frac{e}{24}$$

$\boxed{\textbf{Exercice n°5}}$ (*4 points*)

1) Les dés étant équilibrés, pour munir Ω de la probabilité uniforme on va considérer que les dés sont numérotés (dé 1, dé 2, dé 3, dé 4, dé 5, dé 6). Un tirage apparaît alors comme une 6-liste de l'ensemble $\{1,2,3,4,5,6\}$ et donc $\text{Card}(\Omega) = 6^6 = 46\,656$.

2) L'événement A est alors l'ensemble des 6-listes de $\{1,2,3,4,5\}$. On a donc $\text{Card}(A) = 5^6 = 31\,031$ et par suite $\mathbb{P}(A) = \dfrac{5^6}{6^6} \approx 0,335$.

L'événement « On a obtenu au moins un 6 » est $\overline{A}$ et sa probabilité est donc $1-\mathbb{P}(A) = \dfrac{6^6-5^6}{6^6} \approx 0,665$.

3) Soit C l'événement « On a obtenu exactement trois 6 et trois 2 ». Alors $\text{Card}(C) = \binom{6}{3}$ (nombre de façons de choisir les trois dés parmi les six qui affichent 2, les trois autres affichant alors 6). Par suite, $\mathbb{P}(C) = \dfrac{\binom{6}{3}}{6^6} = \dfrac{20}{6^6} \approx 4,3.10^{-4}$.

$\boxed{\textbf{Exercice n°6}}$ (*3 points*)

Notons M l'événement « L'objet est dans le meuble » et, pour $i \in \{1,\cdots,6\}$, T_i l'événement « L'objet est dans le tiroir i ». On a alors par hypothèse $\mathbb{P}(M) = p$ et $\forall i \in \{1,\cdots,5\}$, $\mathbb{P}_M(T_i) = \dfrac{1}{5}$.

On cherche $\mathbb{P}_{\overline{T_1}\cap\overline{T_2}\cap\overline{T_3}\cap\overline{T_4}}(T_5) = \dfrac{\mathbb{P}(\overline{T_1}\cap\overline{T_2}\cap\overline{T_3}\cap\overline{T_4}\cap T_5)}{\mathbb{P}(\overline{T_1}\cap\overline{T_2}\cap\overline{T_3}\cap\overline{T_4})}$. Or, $\overline{T_1}\cap\overline{T_2}\cap\overline{T_3}\cap\overline{T_4}\cap T_5 = T_5$ et, d'autre part, $\overline{T_1}\cap\overline{T_2}\cap\overline{T_3}\cap\overline{T_4} = \overline{T_1}\cap\overline{T_2}\cap\overline{T_3}\cap\overline{T_4}\cap(T_5\cup\overline{T_5}) = T_5\cup\overline{M}$ (car $M = T_1\cup T_2\cup T_3\cup T_4\cup T_5$).

Comme $T_5 = T_5\cap M$ on a $\mathbb{P}(T_5) = \mathbb{P}_M(T_5).\mathbb{P}(M) = \dfrac{p}{5}$ et donc finalement :

$$\mathbb{P}_{\overline{T_1}\cap\overline{T_2}\cap\overline{T_3}\cap\overline{T_4}}(T_5) = \frac{\mathbb{P}(T_5)}{\mathbb{P}(T_5)+\mathbb{P}(\overline{M})} = \frac{p}{5-4p}.$$

$\boxed{\textbf{Exercice n°7}}$ (*4 points*)

1) Il faut évidemment au moins deux tirages pour obtenir une boule déjà tirée et, comme il n'y a que n boules, on ne peut pas avoir plus de n tirages amenant des boules distinctes. Par suite, $N(\Omega) = \{2,\cdots,n+1\}$.

2) Soit $k \in \{1,\cdots,n\}$. $[N \geqslant k+1]$ est l'événement « Les k premiers tirages ont donné k boules différentes ». Or, un tirage successif avec remise de k boules parmi n se modélise en munissant l'ensemble des k-listes de $\{1,\cdots,n\}$ (de cardinal n^k) de la probabilité uniforme. $[N \geqslant k+1]$ apparaît alors comme l'ensemble des k-arrangements de $\{1,\cdots,n\}$ et a donc pour cardinal A_n^k. On en déduit bien $\mathbb{P}(N \geqslant k+1]) = \dfrac{A_n^k}{n^k}$.

3)
- On a $[N \geqslant n+1] = [N = n+1]$ donc $\mathbb{P}([N = n+1]) = \dfrac{A_n^n}{n^n} = \dfrac{n!}{n^n}$.
- Soit $k \in \{2,\cdots,n\}$. $[N = k] = [N \geqslant k]\cap\overline{[N > k]} = [N \geqslant k]\cap\overline{[N \geqslant k+1]}$ car N est à valeurs entières donc $\mathbb{P}([N = k]) = \mathbb{P}([N \geqslant k]) - \mathbb{P}([N \geqslant k]\cap[N \geqslant k+1]) = \mathbb{P}([N \geqslant k]) - \mathbb{P}([N \geqslant k+1])$ car $[N \geqslant k+1] \subset [N \geqslant k]$. On a donc $\mathbb{P}([N = k]) = \dfrac{A_n^{k-1}}{n^{k-1}} - \dfrac{A_n^k}{n^k} = \dfrac{nA_n^{k-1} - A_n^k}{n^k}$.

4) $\mathbb{E}(N) = \displaystyle\sum_{k=2}^{n+1} k\mathbb{P}([N = k]) = \sum_{k=2}^{n} k\frac{A_n^{k-1}}{n^{k-1}} - \sum_{k=2}^{n} k\frac{A_n^k}{n^k} + (n+1)\frac{A_n^n}{n^n}$ et donc, en changeant l'indice k en $k+1$ dans la première somme, $\mathbb{E}(N) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}(k+1)\frac{A_n^k}{n^k} - \sum_{k=2}^{n} k\frac{A_n^k}{n^k} + (n+1)\frac{A_n^n}{n^n} = 2\frac{A_n^1}{n} + \sum_{k=2}^{n-1}\frac{A_n^k}{n^k} - n\frac{A_n^n}{n^n} + (n+1)\frac{A_n^n}{n^n}$ soit finalement $\mathbb{E}(N) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{A_n^k}{n^k}$ puisque $A_n^0 = 1 = \dfrac{A_n^1}{n}$.