UNIVERSITÉ DE RENNES 1

PRA1 : Probabilités - Analyse - Statistiques

Contrôle continu du jeudi 17 décembre 2015
Durée : 2h

Les sept exercices sont indépendants - Le barème est donné à titre indicatif
La qualité de la rédaction interviendra pour une large part dans l'appréciation de la copie

Exercice n°1 *(3 points)*

Préciser si chacune des propositions suivantes est vraie ou fausse, puis justifier la réponse. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

1) La fonction f définie par : $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = e^{-2x}\,|\cos(\pi x)|$ est dérivable en $\dfrac{1}{2}$.

2) Si A et B sont deux événements tels que $\mathbb{P}_{\overline{B}}(A) = 0{,}4 \quad \mathbb{P}_B(A) = 0{,}3$ et $\mathbb{P}(B) = 0,2$ alors $\mathbb{P}(A \cup B) = 0{,}52$.

Exercice n°2 *(3 points)*

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante. En déduire que cette suite admet une limite.

2) Démontrer que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $u_{2n} - u_n \geqslant \dfrac{1}{2}$. En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Exercice n°3 *(2,5 points)*

1) Énoncer le théorème des accroissements finis pour une fonction réelle de la variable réelle.

2) Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. On suppose que $\forall x \in]a, b[,\ f'(x) \geqslant 0$. Démontrer que f est croissante sur $[a, b]$.

Exercice n°4 *(3,5 points)*

1) Donner le développement limité à l'ordre 4 en 0 de $x \mapsto \cos x$. En déduire le développement limité à l'ordre 4 en 0 de $x \mapsto e^{\cos x}$.

2) Déterminer les réels a et b tels que la limite pour x tendant vers 0 de $\dfrac{a\sqrt{1+x^2} + e^{\cos x} + b}{x^4}$ soit finie et calculer cette limite.

Exercice n°5 *(3 points)*

On lance six dés à six faces parfaitement équilibrés et l'on observe les différents chiffres obtenus.

1) Modéliser l'expérience.

2) Soit A l'événement : « On n'a obtenu aucun 6 ».
Décrire l'événement A à l'aide du modèle de la question précédente.
En déduire la probabilité d'obtenir au moins un 6.

3) Quelle est la probabilité d'obtenir exactement trois 6 et trois 2 ?

b.S.V.P.

$\boxed{\textbf{Exercice n°6}}$ *(3,5 points)*

On cherche un objet dans un meuble constitué de cinq tiroirs.
Si cet objet est bien dans ce meuble, il a autant de chance d'être dans chacun des tiroirs.
La probabilité qu'il soit effectivement dans ce meuble est p (où $p \in]0,1[$).
Sachant qu'on a examiné les quatre premiers tiroirs sans succès, quelle est la probabilité que l'objet se trouve dans le cinquième ?

$\boxed{\textbf{Exercice n°7}}$ *(4 points)*

n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2. On effectue des tirages au hasard dans une urne contenant des boules numérotées de 1 à n. Un tirage consiste à extraire une boule de l'urne, la boule tirée étant ensuite remise dans l'urne. On note N la variable aléatoire égale au numéro du tirage au cours duquel, pour la première fois, on a obtenu une boule déjà obtenue auparavant.

1) Déterminer $N(\Omega)$.

2) Démontrer que : $\forall k \in \{1, \cdots, n\} \quad \mathbb{P}([N \geqslant k+1]) = \dfrac{A_n^k}{n^k}$ où $A_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$.

3) En déduire $\mathbb{P}([N = k])$ (on distinguera les cas $k \leqslant n$ et $k = n+1$)

4) Montrer que l'espérance de N vérifie $\mathbb{E}(N) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{A_n^k}{n^k}$.