PRA1 - Probabilités et Analyse : Corrigé rapide du contrôle continu

Exercice n°1 *(2 points)*

1) Vrai : par définition de la limite d'une suite, $\exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N,\ |u_n - \ell| \leqslant \dfrac{\ell}{2}$.

En particulier, $\forall n \geqslant N,\ u_n \geqslant \ell - \dfrac{\ell}{2} = \dfrac{\ell}{2} > 0$.

2) Faux : la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donnée par $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{1}{n+1}$ converge vers $\ell = 0$ et ce bien que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > 0$.

Exercice n°2 *(2 points)*

La fonction $f : x \mapsto e^x$ est de classe C^4 sur $[0,x]$ et admet une dérivée d'ordre 5 sur $]0,x[$ donc (théorème de Taylor-Lagrange), $\exists c \in]0,x[,\ f(x) = f(0) + \dfrac{x}{1!}f'(0) + \dfrac{x^2}{2!}f''(0) + \dfrac{x^3}{3!}f^{(3)}(0) + \dfrac{x^4}{4!}f^{(4)}(0) + \dfrac{x^5}{5!}f^{(5)}(c)$ soit $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^4}{24} + \dfrac{x^5}{120}e^c$ et donc $\left|e^x - \left(1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^4}{24}\right)\right| = \left|\dfrac{x^5}{120}e^c\right| \leqslant \dfrac{x^5}{40}$.

Pour $x = 1$ on obtient $\left|e - \dfrac{65}{24}\right| \leqslant \dfrac{1}{40}$ donc une valeur approchée de e à 10^{-1} près est $2,7$.

Pour $x = \dfrac{1}{2}$, on obtient $\left|\sqrt{e} - \dfrac{211}{128}\right| \leqslant \dfrac{1}{32.40} = \dfrac{1}{1280}$ ce qui donne $\sqrt{e} \approx 1,648$ à 10^{-3} près.

Exercice n°3 *(6 points)*

1) f est clairement de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$ (comme produit de telles fonctions).

$\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \dfrac{P(x)-P(0)}{x-0}e^{-|x|} \xrightarrow[x\to 0]{} P'(0)$ donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = P'(0)$. De plus, $\forall x \neq 0,\ f'(x) = \begin{cases} P'(x)e^{-x} - P(x)e^{-x} & \text{si } x > 0 \\ P'(x)e^{x} + P(x)e^{x} & \text{si } x < 0 \end{cases}$ et on a donc $f'(x) \xrightarrow[x\to 0]{} P'(0) = f'(0)$ (puisque $P(0) = 0$). f est donc bien de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

2) On a de même $\forall x \neq 0,\ f''(x) = \begin{cases} P''(x)e^{-x} - 2P'(x)e^{-x} + P(x)e^{-x} & \xrightarrow[x\to 0^+]{} P''(0) - 2P'(0) \\ P''(x)e^{x} + 2P'(x)e^{x} + P(x)e^{x} & \xrightarrow[x\to 0^-]{} P''(0) + 2P'(0) \end{cases}$

Ces deux limites étant distinctes (car $P'(0) \neq 0$), f'' n'est pas continue en 0 et f n'est pas de classe C^2.

3) Par croissance comparée des fonctions exponentielles et puissances, on a immédiatement, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$. Cela entraîne par définition l'existence d'un $A > 0$ (respectivement d'un $B < 0$) tel que $\forall x > A,\ |f(x)| \leqslant 1$ (respectivement $\forall x < B,\ |f(x)| \leqslant 1$). D'autre part, f est continue sur le segment $[B,A]$ donc est bornée sur cet intervalle : $\exists M > 0,\ \forall x \in [B,A],\ |f(x)| \leqslant M$. On a donc finalement : $\forall x \in \mathbb{R},\ |f(x)| \leqslant \mathrm{Max}(M,1)$: f est bornée sur $\mathbb{R}$.

4) Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ avec $x \neq y$ (le résultat est clair si $x = y$). f est continue sur $[x,y]$ (ou $[y,x]$) et dérivable sur $]x,y[$ (ou $]y,x[$) donc (théorème des accroissement finis) il existe un réel c compris entre x et y tel que $f(x) - f(y) = (x-y)f'(c)$. On a donc bien $|f(x) - f(y)| \leqslant M_1\,|x-y|$.

En particulier, on a : $\forall \varepsilon > 0,\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ |x-y| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{M_1+1} \Longrightarrow |f(x)-f(y)| \leqslant \varepsilon$ et f est donc bien uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

5) f' est continue sur $\mathbb{R}$ donc en 0. Comme $f'(0) = P'(0) < 0$, on en déduit l'existence d'un petit intervalle centré en 0, $]-h,h[$ sur lequel f' est strictement négative et donc f strictement décroissante. Comme $f(0) = 0$, f est alors strictement négative (respectivement positive) sur $]0,h[$ (respectivement $]-h,0[$). $f(\frac{h}{2}) \in]f(h),0[$ avec $0 = \lim\limits_{+\infty} f$ donc, par continuité de f, $\exists c \in]h,+\infty[,\ f(c) = f(\frac{h}{2})$(théorème des valeurs intermédiaires). f étant continue sur $[\frac{h}{2},c]$ et dérivable sur $]\frac{h}{2},c[$, le théorème de Rolle affirme l'existence de $x_1 \in]\frac{h}{2},c[$ tel que $f'(x_1) = 0$.

De même, $\exists x_2 \in]-\infty,-\frac{h}{2}[,\ f'(x_2) = 0$ et on a bien $x_2 \neq x_1$.

$\boxed{\textbf{Exercice n°4}}$ *(2 points)*

1) En imaginant les boules numérotées de 1 à 20, l'ensemble Ω des tirages peut être vu comme l'ensemble des parties à trois éléments de l'ensemble des vingt boules. Le tirage ayant lieu au hasard et les boules étant indiscernables au toucher, on peut alors munir Ω de la probabilité uniforme.

2)a) $\overline{A}$ apparaît alors comme l'ensemble des parties à trois éléments de l'ensemble des dix-sept boules non blanches donc $\mathbb{P}(\overline{A}) = \dfrac{\binom{17}{3}}{\binom{20}{3}} = \dfrac{17 \times 16 \times 15}{20 \times 19 \times 18} = \dfrac{17 \times 2}{19 \times 3}$ et $\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(\overline{A}) = \dfrac{23}{57}$.

b) B peut être vu comme l'ensemble des $B_1 \cup B_2 \cup B_3$ où B_i, pour $i = 1$ (resp. 2, resp. 3), décrit l'ensemble des parties à un élément de l'ensemble des boules rouges (resp. blanches, resp. bleues). On a donc $\mathbb{P}(B) = \dfrac{\text{Card}(B)}{\text{Card}(\Omega)} = \dfrac{\binom{8}{1}\binom{3}{1}\binom{9}{1}}{\binom{20}{3}} = \dfrac{8.3.9.3!}{20.19.18}$ soit $\mathbb{P}(B) = \dfrac{18}{95}$.

$\boxed{\textbf{Exercice n°5}}$ *(3 points)*

1) Les dés étant équilibrés, pour munir Ω de la probabilité uniforme on va considérer d'une part que les dés sont numérotés (dé 1, dé 2, dé 3) et d'autre part que chaque face d'un dé est distinguable : v (v pour verte), n_1, n_2 (n pour noire), r_1, r_2, r_3 (r pour rouge). Un tirage apparaît alors comme une 3-liste de l'ensemble $\{v, n_1, n_2, r_1, r_2, r_3\}$ et donc $\text{Card}(\Omega) = 6^3$.

2) En notant V (resp. N, resp. R) l'évènement : « À l'issue du lancer, les trois faces obtenues sont vertes (resp. noires, resp. rouges) », on a clairement $C = V \cup N \cup R$ et cette réunion est disjointe. Par axiome de probabilités, on a donc $\mathbb{P}(C) = \mathbb{P}(V) + \mathbb{P}(N) + \mathbb{P}(R)$.

On a $V = \{(v, v, v)\}$ donc $\mathbb{P}(V) = \dfrac{1}{6^3}$, N est l'ensemble des 3-listes de $\{n_1, n_2\}$ donc $\mathbb{P}(N) = \dfrac{2^3}{6^3}$ et R est l'ensemble des 3-listes de $\{r_1, r_2, r_3\}$ donc $\mathbb{P}(R) = \dfrac{3^3}{6^3}$. Finalement, $\mathbb{P}(C) = \dfrac{1+8+27}{6^3} = \dfrac{1}{6}$.

3) On cherche donc $\mathbb{P}_C(V) = \dfrac{\mathbb{P}(C \cap V)}{\mathbb{P}(C)} = \dfrac{\mathbb{P}(V)}{\mathbb{P}(C)}$ (car $V \subset C$). On trouve $\mathbb{P}_C(V) = \dfrac{1}{36}$.

$\boxed{\textbf{Exercice n°6}}$ *(5 points)*

1) Le tirage successif et avec remise de n boules peut être modélisé en considérant un résultat possible comme une n-liste de l'ensemble des onze boules. L'ensemble Ω_n des résultats possibles peut alors être muni de la probabilité uniforme (puisque les boules sont indiscernables au toucher). L'évènement $[X = n]$ est alors constitué des n-uples $(r_1, \cdots, r_{n-1}, b)$ où $(r_1, \cdots, r_{n-1})$ est une $(n-1)$-liste de l'ensemble des quatre boules rouges et (b) est une 1-liste de l'ensemble des sept boules blanches. On a donc $\text{Card}([X = n]) = 4^{n-1}.7$ et par suite $P([X = n]) = \dfrac{4^{n-1}.7}{11^n}$.

On a donc $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}([X = n]) = \dfrac{7}{11}.\left(1 - \dfrac{7}{11}\right)^{n-1}$: X suit la loi géométrique de paramètre $p = \dfrac{7}{11}$.

2) $n^2.n\mathbb{P}([X = n]) = \dfrac{7}{11} n^3 \left(\dfrac{4}{11}\right)^{n-1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ (croissance comparées des fonctions exponentielles et puissances) donc (critère de Riemann), $\sum n\mathbb{P}([X = n])$ converge absolument et X admet une espérance.

$\mathbb{E}(X) = \sum\limits_{n>0} n\mathbb{P}([X = n]) = \sum\limits_{n>0} np(1-p)^{n-1}$. Or, pour $|x| < 1$, $\sum\limits_{n\geqslant 0} x^n = \dfrac{1}{1-x}$ et donc, par dérivation de cette série entière, $\sum\limits_{n>0} nx^{n-1} = \dfrac{1}{(1-x)^2}$. Par suite, $\mathbb{E}(X) = \dfrac{p}{(1-(1-p))^2} = \dfrac{1}{p}$: $\mathbb{E}(X) = \dfrac{11}{7}$.

3) Soient n et k dans $\mathbb{N}$. Par définition, $\mathbb{P}_{[X>n]}([X = k+n]) = \dfrac{\mathbb{P}([X = k+n] \cap [X > n])}{\mathbb{P}([X > n])} = \dfrac{\mathbb{P}([X = k+n])}{\mathbb{P}([X > n])}$ car $[X = k+n] \subset [X > n]$ (en excluant le cas où $k = 0$ pour lequel le résultat annoncé se résume à $0 = 0$).

Comme $[X > n] = \bigcup\limits_{k>n} [X = k]$, par axiome de probabilité,

$$\mathbb{P}([X > n]) = \sum_{k>n} p.(1-p)^{k-1} = p.(1-p)^n \frac{1}{1-(1-p)} \qquad \text{soit} \qquad \mathbb{P}([X > n]) = (1-p)^n$$

Finalement, $\mathbb{P}_{[X>n]}([X = k+n]) = \dfrac{p.(1-p)^{k+n-1}}{(1-p)^n} = p.(1-p)^{k-1} = \mathbb{P}([X = k])$.