UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Master 1 MEEF - Parcours Mathématiques

PRA1 : Probabilités et Analyse

Contrôle continu du jeudi 11 décembre 2014

Durée : 2h

Les six exercices sont indépendants - Le barème est donné à titre indicatif

La qualité de la rédaction interviendra pour une large part dans l'appréciation de la copie

Exercice n°1 *(2 points)*

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels convergeant vers un réel ℓ.
Préciser si chacune des propositions suivantes est vraie ou fausse, puis justifier la réponse. Une réponse non justifiée ne rapporte rien.

1) Si $\ell > 0$ alors, à partir d'un certain rang, tous les termes de cette suite sont strictement positifs.

2) Si, à partir d'un certain rang, tous les termes de cette suite sont strictement positifs, alors $\ell > 0$.

Exercice n°2 *(2 points)*

On rappelle que le nombre $e = e^1$ vérifie $2 < e < 3$.
Soit x un réel de $]0,1]$. Montrer que $\left|e^x - \left(1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^4}{24}\right)\right| \leqslant \dfrac{x^5}{40}$.
En déduire une valeur approchée de e à 10^{-1} près. Donner une valeur approchée de $\sqrt{e}$ à 10^{-3} près.

Exercice n°3 *(6 points)*

Soient $n \geqslant 1$ un entier et P un polynôme de degré n vérifiant $P(0) = 0$ et $P'(0) \neq 0$.
On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = P(x)e^{-|x|}$.

1) Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

2) Question Bonus : f est-elle de classe C^2 sur $\mathbb{R}$?

3) Vérifier que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$. En déduire que f est bornée sur $\mathbb{R}$.
On montre de même que f' est bornée sur $\mathbb{R}$ et on pose $M_1 = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |f'(x)|$.

4) Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que $|f(x) - f(y)| \leqslant M_1 |x - y|$.
En déduire que f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

5) On suppose par exemple $P'(0) < 0$.
Montrer qu'il existe un intervalle $]0,h[$ (resp. $]-h,0[$) sur lequel f est strictement négative (resp. positive).
En déduire l'existence de deux points distincts x_1 et x_2 tels que $f'(x_1) = f'(x_2) = 0$.

T.S.V.P.

$\boxed{\textbf{Exercice n°4}}$ *(2,5 points)*

Une urne contient vingt boules indiscernables au toucher : huit boules rouges, trois blanches et neuf bleues. On tire au hasard et simultanément trois de ces boules.

1) Modéliser l'expérience.

2) Déterminer la probabilité de chacun des évènements suivants :

a) A : « On obtient au moins une boule blanche ».

b) B : « On obtient une boule de chaque couleur ».

$\boxed{\textbf{Exercice n°5}}$ *(3 points)*

On dispose de trois dés cubiques identiques parfaitement équilibrés possédant chacun une face verte, deux faces noires et trois faces rouges.

On lance ces trois dés et on observe les couleurs des faces obtenues.

1) Modéliser l'expérience.

2) Soit l'évènement C : « À l'issue du lancer, les trois faces obtenues sont de la même couleur ».

Démontrer que la probabilité de C est égale à $\dfrac{1}{6}$.

3) Sachant que les trois faces obtenues sont de la même couleur, quelle est la probabilité pour que les trois faces obtenues soient vertes ?

$\boxed{\textbf{Exercice n°6}}$ *(4,5 points)*

Une urne contient sept boules blanches et quatre boules rouges indiscernables au toucher. On tire successivement et avec remise une boule de cette urne. Soit X la variable aléatoire représentant le nombre de tirages nécessaires pour obtenir la première boule blanche.

1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On s'intéresse à l'évènement $[X = n]$. Modéliser l'expérience correspondante et calculer $\mathbb{P}([X = n])$.
En déduire la loi de probabilité de X.

2) Montrer que X admet une espérance. **Question bonus :** Calculer cette espérance.

3) Pour n et k dans $\mathbb{N}$, montrer que $\mathbb{P}_{[X>n]}([X = k + n]) = \mathbb{P}([X = k])$.