Feuille d'exercices de probabilités

Ensembles, applications, dénombrements

Exercice n°1

Soit X l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $X(x) = x^2 + x - 2$.

1) Donner la définition de $X^{-1}(\{4\})$. Calculer $X^{-1}(\{4\})$.

2) X est-elle injective ? Est-elle surjective ?

3) Donner la définition de $X([-1,1])$. Calculer $X([-1,1])$.

4) Donner la définition de $X^{-1}([-2,4])$. Calculer $X^{-1}([-2,4])$

Exercice n°2

Soit X l'application de $\mathbb{R}^2$ dans lui-même définie par $X((x,y)) = (x+y, xy)$ pour tout (x,y) de $\mathbb{R}^2$.

1) Calculer $X^{-1}(\{(3,2)\})$. X est-elle injective ?

2) X est-elle surjective ? Déterminer son image.

Exercice n°3

(CAPES 2014ex - Deuxième composition)

Soit b un nombre premier distinct de 2 et 5. On note $\bar{a}$ la classe d'un entier a dans $\mathbb{Z}/b\mathbb{Z}$ et $(\mathbb{Z}/b\mathbb{Z})^*$ l'ensemble $\mathbb{Z}/b\mathbb{Z}$ privé de 0. Démontrer que l'application $f : \left\{ \begin{array}{ccc} (\mathbb{Z}/b\mathbb{Z})^* & \to & (\mathbb{Z}/b\mathbb{Z})^* \\ \bar{a} & \mapsto & \overline{10} \times \bar{a} \end{array} \right.$ est bien définie et injective.

Exercice n°4

Soient f une application de E dans F, g une application de F dans G et $h = g \circ f$.

1) Montrer que si h est surjective et g injective, alors f est surjective.

2) Montrer que si h est injective et f surjective alors g est injective.

Exercice n°5

Soient E et F deux ensembles non vides et X une application de E dans F.

1) Soient A_1 et A_2 deux parties de E. Montrer que l'on a toujours $X(A_1 \cup A_2) = X(A_1) \cup X(A_2)$ mais que $X(A_1 \cap A_2) \subset X(A_1) \cap X(A_2)$ avec égalité si X est injective.

2) Soient B_1 et B_2 deux parties de F. Montrer que $X^{-1}(B_1 \cup B_2) = X^{-1}(B_1) \cup X^{-1}(B_2)$. Montrer que $X^{-1}(B_1 \cap B_2) = X^{-1}(B_1) \cap X^{-1}(B_2)$ et que $X^{-1}(\overline{B_1}) = \overline{X^{-1}(B_1)}$.

3) Soient X et Y deux applications de Ω dans $\mathbb{N}$. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ (X+Y)^{-1}(\{n\}) = \bigcup_{k=0}^{n} X^{-1}(\{k\}) \cap Y^{-1}(\{n-k\})$$

Exercice n°6

A, B et C désignent trois parties d'un même ensemble Ω.

1) Montrer que : $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$, $\quad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ et $(A \cup B) - (A \cap B) = (\overline{A} \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$

2) Simplifier les expressions suivantes : $(A \cup B) \cap (A \cup \overline{B})$ et $(A \cup B) \cap (B \cup C)$

3) Parmi les propositions suivantes, prouvez celles qui sont vraies et donnez un contre-exemple pour les autres.

a) si $A \cup B = \Omega$ et $A \cap B = \emptyset$ alors $A = \overline{B}$
b) si $A \subset \overline{B}$, $A \cup B = \Omega$
c) si $A \cup B = \Omega$, $A \subset B$
d) si $A \cup B = \Omega$, $\overline{A} \subset \overline{B}$
e) $(A \cap B) \cup C = A \cap (B \cup C)$

Exercice n°7

Soient A, B et C des sous-ensembles d'un ensemble E. On suppose que $A \cup B \subset A \cup C$ et $A \cap B \subset A \cap C$. Montrer que B est un sous-ensemble de C.

Exercice n°8 *(Examen 2012/2013)*

En 2007, le taux brut de mortalité en Inde est inférieur à celui de la France : 8 pour 1 000 contre 9 pour 1 000. Pourtant à tout âge le taux de mortalité est inférieur en France à ce qu'il est en Inde. Expliquer.

Exercice n°9 *(Examen 2012/2013)*

Un patron, monsieur Taylor, achète des pièces de deux sortes, P_1 et P_2, à deux fournisseurs différents, F_1 et F_2. Il a fait compter la proportion de pièces défectueuses pour chacun des fournisseurs. Le résultat est 1% pour F_1, 3% pour F_2. « Annulez toutes les commandes de F_2 », dit-il à Bourgeois, le chef de son service des approvisionnements. « C'est étrange, tous les ouvriers prétendent que F_2 est plus fiable. Peut-être faudrait-il regarder les choses de plus près », répond Bourgeois. Que veut-il dire ? Donner un exemple montrant qu'il se pourrait qu'effectivement F_2 soit plus fiable.

Exercice n°10

On considère les nombres à huit chiffres dont l'écriture comporte chacun des chiffres 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 et 8.

1) Combien y a-t-il de tels nombres ? Montrer qu'aucun de ces nombres n'est premier.

2) Si on range ces nombres par ordre croissant, quel est le rang de 48 713 526 ?

3) Quelle est la somme de tous ces nombres ?

Exercice n°11

Un sac contient six jetons numérotés de 1 à 6. On en tire successivement trois sans remise. Quelle est le nombre de tels tirages produisant une suite non monotone ?

Exercice n°12 *(CAPES 2015 - Deuxième composition)*

Dans l'enseignement supérieur, on définit, pour tout entier $p \in [\![0, n]\!]$, l'entier $\binom{n}{p}$ comme étant le nombre de parties à p éléments d'un ensemble à n éléments.

1) Justifier la cohérence de cette définition avec celle qui est donnée au lycée et montrer que $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.

2) On suppose dans cette question que $k \neq 0$. En exprimant de deux manières différentes le nombre de $(n+1)$-uplets contenant k fois l'élément 1, démontrer que $\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$.

Exercice n°13

Un placard renferme n paires de chaussures toutes différentes. On en extrait au hasard $2r$ chaussures. Combien y a-t-il de résultats possibles ? Combien y en a-t-il ne contenant aucune paire ?

Exercice n°14

1) Soient n et p deux entiers naturels. Montrer que $\binom{n}{p}$ est le nombre de p-uplets $(x_1, \cdots, x_p) \in \mathbb{N}^p$ tels que $0 \leqslant x_1 < \cdots < x_p < n$.

Application : Combien y a-t-il d'injections croissantes de $\{1, \cdots, p\}$ dans $\{1, \cdots, n\}$?

2) Montrer alors que $\binom{n+p-1}{p}$ est le nombre de p-uplets $(y_1, \cdots, y_p) \in \mathbb{N}^p$ tels que $0 \leqslant y_1 \leqslant \cdots \leqslant y_p < n$.

Exercice n°15

Pour $n, p \in \mathbb{N}$, on note H_n^p le nombre de solutions $(x_1, \cdots, x_p) \in \mathbb{N}^p$ de l'équation $\sum_{k=1}^{p} x_k = n$.

Montrer que $H_n^p = \binom{n+p-1}{p-1}$.

Application 1 : 20 auteurs ont écrit des livres particulièrement intéressants pour réussir notre concours. On a un buget suffisant pour acheter 10 livres. Il va falloir faire un choix. On ne pourra pas avoir un livre par auteur. En revanche, on pourra avoir plusieurs livres du même auteur. Pour chaque achat possible de 10 livres, on ne s'intéresse qu'aux séquences des nombres de livres achetés de chacun de ces auteurs recommandés. Sachant que ces auteurs ont tous publié au moins 10 livres, quel est le nombre de séquences possibles ?

Application 2 : De combien de façons peut-on partager cent pièces de 1 euro entre cinq personnes.

Exercice n°16

Pour $n, p \in \mathbb{N}$, on se donne p entiers $n_i \in \mathbb{N}$ tels $n_1 + n_2 + \cdots + n_p = n$.

Dénombrer les p-uplets $X = (x_1, \cdots, x_p)$ de $\mathbb{N}^p$ contenant exactement n_1 fois 1, n_2 fois 2,..., n_p fois p.

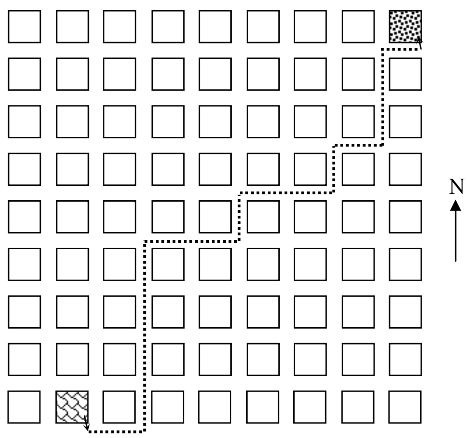
Application : Combien y a-t-il d'anagrammes du mot MATHEMATIQUES ?

Exercice n°17 *(Oral 2 - CAPES 2006)*

Un homme travaille à Manhattan, dans un quartier où les avenues sont orientées nord-sud et les rues est-ouest.

Il travaille à sept pâtés de maison à l'est et huit pâtés de maison au nord de son domicile. Pour aller à son travail chaque jour il parcourt donc la longueur de quinze pâtés de maison (il ne se dirige ni au sud ni à l'ouest).

On suppose qu'il existe une voie le long de chaque pâté de maisons et qu'il peut prendre n'importe lesquelles dans ce schéma rectangulaire. Le dessin ci-contre illustre la situation ; un trajet a été représenté en pointillé.



1) Proposer un « codage » permettant de décrire le trajet représenté.

2) Combien de trajets différents l'homme peut-il emprunter ?

3) L'homme prétend que le nombre de trajets est aussi le nombre de suites de huit entiers naturels dont la somme est 8. A-t-il raison ?

Exercice n°18

On dispose de cinq boules et de quatre urnes. Combien y a-t-il de répartitions possibles de ces boules dans ces urnes ? De répartitions laissant au moins deux urnes vides ? De répartitions où une urne au moins contient trois boules ? De répartitions où une urne contient au moins trois boules ?

Exercice n°19

Soient Ω fini ou dénombrable et P une application de $\mathscr{P}(\Omega)$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant :

$$\forall A_1, A_2 \in \mathscr{P}(\Omega),\ A_1 \cap A_2 = \emptyset \Longrightarrow P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2)$$

Montrez que si $(A_i)_{i=1}^n$ est une famille de parties de Ω vérifiant : $\forall i \neq j,\ A_i \cap A_j = \emptyset$ alors on a :

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

Probabilités sur un univers fini ou dénombrable

Exercice n°20

A, B et C désignent trois évènements correspondants à une même expérience aléatoire. Exprimez à l'aide de A, B et C les faits :

1) aucun évènement n'est réalisé **2)** au plus deux le sont **3)** au moins un l'est
4) aucun n'est réalisé **5)** A et B le sont mais pas C **6)** ni A ni B ne le sont

Exercice n°21

1) Montrez que : $A \cup B = A \cup (B - A \cap B)$ et décomposez de même $A \cup B \cup C$ en réunion disjointe. Déduisez-en : $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$ Généralisez ce résultat.

2) Déterminez la probabilité pour qu'au bridge (quatre joueurs, jeu de 52 cartes) au moins l'un des joueurs ait 13 cartes de la même couleur (piques, coeurs, carreaux, où trèfles).

Exercice n°22

On considère un prisme droit à base carrée constitué d'une matière homogène. On estime que lancé, la probabilité qu'il s'arrête sur une face latérale est trois fois plus importante que celle qu'il s'arrête sur une base. Déterminez la probabilité pour que le prisme s'arrête sur une base (respectivement sur une face).

Exercice n°23

a) Montrez que la donnée des $p_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$ définit une probabilité sur $\mathbb{N}^*$.

b) Soit $\lambda > 0$. Montrez que la donnée des $p_n = e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^n}{n!}$ définit une probabilité sur $\mathbb{N}^*$. Calculer $P(2\mathbb{N})$ et sa limite lorsque λ tend vers $+\infty$.

Exercice n°24 *(Tirages avec et sans remise)*

Soient M un ensemble (population) à r éléments (individus) et $n \geqslant 1$. On pose

$$\Omega_1 = M^n = \{(x_1, \cdots, x_n) | \forall i = 1, \cdots n,\, x_i \in M\}$$
$$\Omega_2 = \{(x_1, \cdots, x_n) | \forall i, j = 1, \cdots, n,\, x_i \in M \text{ et } x_i \neq x_j\}$$
$$\Omega_3 = \{\omega \in \mathscr{P}(M) | Card(\omega) = n\}$$

et pour k = 1, 2, 3 on pose P_k la probabilité uniforme sur Ω_k.

1) Calculez Card(Ω_k).

2) Indiquez quels couples (Ω_k, P_k) vous paraissent convenir pour modéliser n tirages au hasard dans M (prélèvement d'un n-échantillon dans M) dans le cas de tirages : **a)** avec remise **b)** sans remise.

3) Lorsque deux couples conviennent, explicitez une relation de compatibilité entre les deux modèles.
Soit M_1 un sous-ensemble (sous-population) de M à r_1 éléments. Pour $0 \leqslant k \leqslant n$, on considère l'évènement E_k : « le n-échantillon contient k individus de la sous-population M_1 »

4) Pour chacun des modèles envisagés ci-dessus, c'est à dire pour i = 1, 2, 3, écrivez E_k comme un sous-ensemble E_i^k de Ω_i et calculez $P(E_i^k)$.

5) r est connu et on cherche à estimer r_1 par sondage. Plus précisément, on prélève au hasard dans M un n-échantillon avec remise. Soit k, $0 \leqslant k \leqslant n$, le nombre d'individus de M_1 contenus dans cet échantillon. En étudiant $P(E_1^k)$ comme fonction de r_1/r, déterminez l'entier $\widehat{r_1}$ pour lequel cette probabilité est maximum. $\widehat{r_1}$ est *l'estimateur du maximum de vraissemblance* pour le paramètre r_1.

Exercice n°25 *(contrôle continu 2013/2014)*

On tire au hasard et simultanément deux cartes d'un jeu de treize cartes : neuf noires et quatre rouges. A-t-on plus d'une chance sur deux de tirer deux noires ?

Exercice n°26

Une urne contient n boules blanches (n entier non nul), deux boules noires et trois boules rouges. On extrait simultanément deux boules de l'urne (tirages équiprobables).

1) Calculer la probabilité d'obtenir :
a) deux boules noires **b)** au moins une boule blanche **c)** deux boules de couleurs différentes

2) Déterminer n pour que la probabilité d'obtenir « aucune boule blanche » soit de 2/11.

Exercice n°27

On fait n choix au hasard, indépendants, d'un entier entre 0 et 9. Déterminez le plus petit entier n tel que la probabilité d'obtenir au moins un 7 soit plus grande que $\dfrac{9}{10}$.

Exercice n°28 *(contrôle continu 2014/2015)*

Une urne contient vingt boules indiscernables au toucher : huit boules rouges, trois blanches et neuf bleues. On tire au hasard et simultanément trois de ces boules.

1) Modéliser l'expérience.

2) Déterminer la probabilité de chacun des évènements suivants :

a) A : « On obtient au moins une boule blanche ».

b) B : « On obtient une boule de chaque couleur ».

$\boxed{\textbf{Exercice n°29}}$ *(Oral 2 - CAPES 2010)*

On place dans une urne 100 billets de loterie dont seulement deux sont gagnants.

1) Un joueur achète deux billets, qu'il tire simultanément dans l'urne.

a) Quelle est la probabilité de ne pas gagner ?

b) En déduire la probabilité d'avoir au moins un billet gagnant.

2) Soit n un entier ($n \geqslant 2$). Un joueur achète n billets, qu'il tire simultanément dans l'urne. Soit A_n l'évènement : « Avoir 1 ou 2 billet(s) gagnant(s) en achetant n billets ».

a) Décrire à l'aide d'une phrase l'évènement $\overline{A_n}$, évènement contraire de A_n.

b) Montrer que la probabilité de l'évènement $\overline{A_n}$ est :

$$p(\overline{A_n}) = \frac{(100-n)(99-n)}{100 \times 99}$$

c) Quel est le nombre minimum n_0 de billets à acheter pour que la probabilité d'avoir au moins 1 billet gagnant soit supérieure ou égale à $\frac{1}{2}$?

$\boxed{\textbf{Exercice n°30}}$ *(Oral 2 - CAPES 2012)*

On lance deux dés équilibrés à 6 faces, l'un est rouge et l'autre est noir. On s'intéresse à la somme des nombres qui apparaissent sur la face du dessus.

Le dé rouge porte sur ses faces les numéros : 1 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 4.

Le dé noir porte sur ses faces les numéros : 2 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 5.

1) Combien y-a-t-il d'issues ? Sont-elles équiprobables ?

2) Obtient-on plus souvent une somme supérieure ou égale à 7 ou bien une somme inférieure ou égale à 7 ?

$\boxed{\textbf{Exercice n°31}}$ *(Oral 2 - CAPES 2013)*

On propose le jeu suivant.

On tire au hasard une boule d'une urne contenant cinq boules rouges et une boule verte. On note sa couleur, puis on la remet dans l'urne. On effectue ainsi quatre tirages.

- si les quatre boules tirées sont rouges, le joueur perd ;
- si au moins une des quatre boules tirées est verte, le joueur gagne.

Avez-vous intérêt à jouer à ce jeu ?

Probabilités conditionnelles - Indépendance

$\boxed{\textbf{Exercice n°32}}$ *(Oral 2 - CAPES 2006)*

On considère un carré $ABCD$ et son centre O. On note $\Gamma = \{A, B, C, D, O\}$.

Une puce se déplace aléatoirement en sautant d'un point de Γ à un autre. La seule contrainte est que, si un saut relie deux sommets du carré, ceux-ci doivent être adjacents. A chaque saut, tous les déplacements sont équiprobables. La puce ne reste pas deux fois de suite au même endroit.

Au départ, c'est-à-dire avant son premier saut, la puce se trouve au point O.

Pour tout entier naturel n, on note O_n l'évènement « la puce se trouve au point O à l'issue de son $n^{ième}$ saut ». On note $p_n = \mathbb{P}(O_n)$; on a donc $p_0 = 1$.

On définit de même les évènements A_n, B_n, C_n, D_n.

1) Calculer p_1 et p_2.

2) Pour tout entier naturel n, démontrer les égalités : $\mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}(B_n) = \mathbb{P}(C_n) = \mathbb{P}(D_n) = \dfrac{1}{4}(1 - p_n)$

3)

a) Démontrer que, pour tout entier naturel n, $p_{n+1} = \dfrac{1}{3}(1 - p_n)$. (On pourra utiliser la formule des probabilités totales).

b) À l'aide de la calculatrice, émettre une conjecture concernant la limite de la suite (p_n).

4)

a) Démontrer que, pour tout entier naturel n, on a : $p_n = \dfrac{1}{4} + \dfrac{3}{4}\left(-\dfrac{1}{3}\right)^n$.

b) Calculer la limite de la suite (p_n). Cela valide-t-il la conjecture émise en 3)b) ?

Exercice n°33 *(Oral 2 - CAPES 2005)*

Une usine produit des objets dont un pour cent est défectueux. On teste ces objets en bout de chaîne.

- Si un objet est défectueux, la probabilité que le test le décèle est égale à 0,9.
- Si un objet n'est pas défectueux, la probabilité que le test le trouve défectueux est égale à 0,05.

On teste un objet pris au hasard.

1) Le test donne cet objet comme défectueux, quelle est la probabilité qu'il le soit réellement ?

2) Les évènements « l'objet pris au hasard est défectueux » et « l'objet pris au hasard est donné défectueux par le test » sont-ils indépendants ?

Exercice n°34 *(CAPES 2014ex - première composition)*

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $N \in \mathbb{N}^*$. On dispose de N urnes $U_1, \cdots, U_N$ contenant des boules rouges et des boules blanches et telles que, pour tout $j \in [\![1, N]\!]$, la proportion de boules rouges dans U_j est $\dfrac{j}{N}$.
On choisit une urne au hasard et on effectue dans cette urne n tirages indépendants d'une boule avec remise.
Pour tout entier naturel k, on note $p_N(k)$ la probabilité que le nombre de boules rouges obtenues soit égal à k. Démontrer que : $p_N(k) = \dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_{j=1}^{N}\binom{n}{k}\left(\frac{j}{N}\right)^k\left(1 - \frac{j}{N}\right)^{n-k}$.

Exercice n°35

Les urnes U_1 et U_2 contiennent des boules blanches et noires dans les proportions respectives p_1, q_1 et p_2, q_2 $(p_i + q_i = 1)$. On tire n boules avec remise dans U_1 puis, si l'on a observé k blanches, on tire k boules avec remise dans U_2 . Quelle est la probabilité d'obtenir r blanches à ce deuxième tirage ?

Exercice n°36

On jette deux fois une pièce équilibrée. On considère les évènements correspondants respectivement à l'obtention de : A : « pile la première fois », B : « face la deuxième fois » et C : « deux fois le même côté de la pièce ». Etudiez l'indépendance des évènements :

a) A et B **b)** B et C. **c)** C et A. **d)** A, B et C.

Exercice n°37

On jette un dé équilibré. On considère les évènements correspondants respectivement à l'obtention d'un nombre : A : « $\leqslant 3$ », B : « pair » et C : « 1, 2, 4 ou 5 ». Calculez $P(A)$, $P(B)$, $P(C)$ et $P(A \cap B \cap C)$. Les évènements A, B et C sont-ils indépendants ?

Exercice n°38 *(Oral 2 - CAPES 2010)*

Une urne contient une boule blanche et une boule noire. On effectue au hasard n tirages successifs ($n \geqslant 2$) d'une boule en remettant la boule dans l'urne après chaque tirage.

1)a) Calculer la probabilité de l'évènement « toutes les boules tirées ont la même couleur ».

b) Calculer la probabilité de l'évènement « on obtient exactement une boule blanche".

On considère les deux évènements A et B suivants :
A : « on obtient des boules des deux couleurs »
B : « on obtient au plus une boule blanche »

2) Calculer les probabilités $P(A \cap B)$, $P(A)$ et $P(B)$.

3) Montrer que $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ si et seulement si l'entier n vérifie l'égalité $2^{n-1} = n + 1$.

4) En déduire qu'il existe une valeur unique de n pour laquelle A et B sont deux évènements indépendants (on pourra considérer la suite $(u_n)_{n \geqslant 2}$ définie par $u_n = 2^{n-1} - (n + 1)$ et montrer qu'elle est strictement croissante).

Exercice n°39

Ω désigne l'ensemble des permutations de $\{1, 2, 3\}$ identifié à l'ensemble des triplets (a, b, c) où a, b et c sont des entiers tous distincts, égaux à 1, 2 ou 3. Ω est muni de la probabilité uniforme On pose :

$$A = \{(a, b, c) | (a, b, c) \in \Omega \text{ et } a > b\}$$

$$B = \{(a, b, c) | (a, b, c) \in \Omega \text{ et } a > c\}$$

$$C = \{(a, b, c) | (a, b, c) \in \Omega \text{ et } b > c\}$$

Les évènements A, B et C sont-ils indépendants ? Qu'en est-il des évènements A et $B \cap C$?

Exercice n°40

On considère deux évènements A et B, indépendants, de probabilités p et q, et on pose :
$C = A \cap B + A^C \cap B^C$. Calculez p et q pour que A, B et C soient deux à deux indépendants. A, B et C sont-ils alors indépendants ?

Exercice n°41

A, B et C étant trois évènements, on dit que A et B sont indépendants conditionnellement à C si

$$P_C(A \cap B) = P_C(A)P_C(B)$$

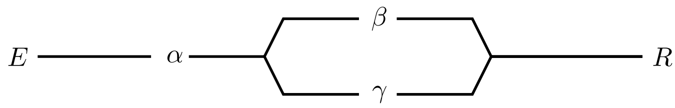
a) Montrez que si A, B et C sont indépendants, A et B sont indépendants conditionnellement à C. Que dire de la réciproque ?

b) Trouvez un exemple où A, B et C sont indépendants deux à deux mais où A et B ne sont pas indépendants conditionnellement à C.

Exercice n°42

Les composants α, β , γ du circuit ci-dessous sont sujets à pannes.

À un instant donné le fonctionnement de α, β, γ est aléatoire et l'état du circuit est décrit par un espace de probabilité discret (Ω, P) que l'on ne cherchera pas à préciser.



On considère les évènements : A : « le composant α fonctionne » B : « le composant β fonctionne » C : « le composant γ fonctionne » S : « un signal électrique émis en E est reçu en R (c'est à dire qu'il existe un chemin de E à R le long duquel tous les composants fonctionnent) ».

L'observation de circuits semblables a permis les évaluations suivantes :

$$P(A) = 0,9 \qquad P_A(B) = 0,9 \qquad P_{A\cap\overline{B}}(C) = 0,5$$

1) Interprétez $P_{A\cap\overline{B}}(C)$.

2) Exprimez S à l'aide de A, B et C. Déduisez-en, par le calcul, une expression simplifiée de $S \cap (A \cap B)$ et l'égalité $S \cap \overline{A \cap B} = A \cap \overline{B} \cap C$

3) Calculez $P(A \cap B)$ et $P(A \cap \overline{B})$. Déterminez finalement $P(S)$.

Exercice n°43 *(Examen 2012/2013 - 2$^{\text{ème}}$ session)*

Une puce saute sur les sommets d'un triangle ABC en suivant les règles suivantes :

- si elle se trouve en A elle saute en B avec probabilité $1/3$, et saute en C avec probabilité $2/3$,
- si elle se trouve en B elle reste en B avec probabilité $1/2$, et saute en A avec probabilité $1/2$,
- si elle se trouve en C elle saute en B avec probabilité $1/3$, et reste en C avec probabilité $2/3$.

Un saut a lieu à chaque seconde (instant). À l'instant 0, la puce se trouve en C.

On note A_n (resp. B_n, C_n) l'évènement « la puce se trouve en A (resp. en B, en C) à l'instant n ».

1) Traduire en notations mathématiques les données de l'énoncé.

2) Calculer $\mathbb{P}(A_1)$, $\mathbb{P}(B_1)$, $\mathbb{P}(C_1)$.

3) Donner une matrice Q de taille 3×3 telle que

$$(\mathbb{P}(A_{n+1}), \mathbb{P}(B_{n+1}), \mathbb{P}(C_{n+1})) = (\mathbb{P}(A_n), \mathbb{P}(B_n), \mathbb{P}(C_n))\, Q$$

4) Montrer que Q a trois valeurs propres : 1 et deux valeurs propres distinctes de modules strictement inférieurs à 1 (calculer les valeurs propres).

5) En déduire que Q^n a une limite lorsque n tend vers l'infini ainsi que les quantités $\mathbb{P}(A_n)$, $\mathbb{P}(B_n)$, $\mathbb{P}(C_n)$.

Variables aléatoires réelles discrètes

Exercice n°44 *(Oral 2 - CAPES 2009)*

Au cours d'une journée, un commercial se déplace pour visiter deux de ses clients afin de leur proposer l'achat d'un produit de grande consommation d'une valeur de 500 euros. Au vu de son expérience, le commercial estime que :

- la probabilité que le premier client visité achète le produit est égal à 0,25 ;

- si le premier client achète le produit, la probabilité que le second client visité achète le produit est égale à 0,4 ;
- si le premier client n'achète pas le produit, la probabilité que le second client visité achète le produit est égale à 0,25 ;

1) On note A l'évènement « le premier client achète le produit » et B l'évènement « le second client achète le produit ». Calculer la probabilité de l'évènement B.

2) Quelle est la probabilité qu'un seul des clients conclut l'achat ?

3) Le commercial perçoit 15 % sur le total de sa vente.

a) Établir la loi de probabilité associée au gain de la journée.

b) Quelle est l'espérance mathématique du gain ?

4) Quel doit être le pourcentage minimum de sa commission pour que cette espérance dépasse 60 euros ?

Exercice n°45

On jette deux fois un dé équilibré. Soit Z la v.a. égale au maximum des points obtenus. Pour $k = 1, \cdots, 6$, calculez $P[Z \leqslant k]$. Déduisez-en la loi de Z.

Exercice n°46

Un urne contient p boules rouges et q boules noires. On tire n boules sans remise ($n \leqslant p + q$). Soit X le nombre de boules rouges obtenues. Quelle est la loi de X (hypergéométrique) ?

Exercice n°47

Un lac contient N poissons ($N > 1000$). On pêche 1000 poissons, on les marque et on les relâche. On pêche à nouveau 1000 poissons. Soit X la var égale au nombre de poissons marqués obtenus. Quelle est la loi de X ? On a en fait pêché 10 poissons marqués. Déterminez N pour que : $\forall k$, $P(X = 10) \geqslant P(X = k)$ (N est l'*estimateur de plausibilité maximum*). Déterminez N pour que $P(X = 10)$ soit le plus grand possible (N est l'*estimateur de vraissemblance maximum*).

Exercice n°48

On place au hasard trois boules distinctes dans trois urnes distinctes. Soit N la v.a. égale au nombre d'urnes qui ne sont pas vides. Déterminez la loi de N.

Exercice n°49

1) On lance deux dés non pipés. On note X la moyenne des deux valeurs. Donner la loi de X. Calculer l'espérance et la variance de X.

2) On lance trois dés non pipés. On note X la plus petite des valeurs obtenues. Donner la loi de X.

Exercice n°50

Une urne contient N boules numérotées de 1 à N. On tire n boules avec remise. Soit X la v.a.r. égale au nombre maximum obtenu. Quelle est la loi de X ? (on pourra calculer $P(X \leqslant k)$).

$\boxed{\textbf{Exercice n°51}}$

On jette dix fois un dé à six faces (non truqué). On note X_i le numéro obtenu au $i$ème jet.

1) Déterminer la loi des variables aléatoires X_i. Calculer $\mathbb{E}(X_i)$ et $Var(X_i)$.

2) On note Y la moyenne des deux premières valeurs obtenues : $Y = \dfrac{X_1 + X_2}{2}$. Donner la loi de Y, son espérance et sa variance.

3) On pose $M = \max(X_1, \ldots, X_{10})$. Calculer $\mathbb{P}(M \leqslant k)$ $(1 \leqslant k \leqslant 6)$ et en déduire la loi de M. Calculer $\mathbb{E}(M)$ et $Var(M)$.

$\boxed{\textbf{Exercice n°52}}$

Dans une ville, les taxis sont numérotés de 1 à T. On cherche à estimer T. On observe au cours de la journée 4 taxis portant les numéros 512, 987, 355 et 1200. Une personne prétend que $T \geqslant 3000$. Qu'en pensez-vous ? Déterminer tous les entiers T pour lesquels la probabilité d'avoir rencontré 4 taxis de numéros inférieurs à 1200 soit supérieure à 95 %. (L'intervalle obtenu est appelé *intervalle de confiance* de T *au seuil* de 5%).

$\boxed{\textbf{Exercice n°53}}$

Une urne contient des boules blanches et noires dans les proportions p et q $(p + q = 1)$. On tire des boules avec remise jusqu'à obtenir une blanche. Soit X la var égale au nombre de tirages. Quelle est la loi de $Y = X - 1$ (géométrique) ? Son espérance ?

$\boxed{\textbf{Exercice n°54}}$

Les dés dont il est question dans cet exercice sont des dés courants à 6 faces numérotées de 1 à 6. On considère que chaque numéro a autant de chances que les autres de sortir : 1 chance sur 6.

1) Montrer que, pour tout réel $x \in]-1, 1[$, on a $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$.

2) On lance deux dés jusqu'à obtenir un double 6. On note X le nombre de lancers effectués.

a) Quelle est la loi de X ?

b) Combien de lancers faut-il faire en moyenne pour obtenir un double 6 ? Autrement dit, quelle est l'espérance de X ?

3) On lance successivement deux dés (A et B). Quand l'un donne 6 on arrête de le lancer et on continue avec le deuxième jusqu'à obtenir 6. On note Y le nombre de lancers effectués, U le nombre de lancers du dé A, V le nombre de lancers du dé B.

a) Exprimer Y en fonction de U et V.

b) Quelles sont les lois de U et V. Pour $k \geqslant 1$ un entier, calculer $\mathbb{P}(U \leqslant k)$. On suppose que U et V sont indépendantes, donc que $\mathbb{P}((U \leqslant k) \cap (V \leqslant k)) = \mathbb{P}(U \leqslant k)\mathbb{P}(V \leqslant k)$.

c) Exprimer $P(Y = k)$ en fonction de $P(Y \leqslant k) = P((U \leqslant k) \cap (V \leqslant k))$ et de $P(Y \leqslant k - 1)$. En déduire une expression de $\mathbb{P}(Y = k)$.

d) Calculer l'espérance de Y.

Exercice n°55

Soit T une v. a. à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle que pour tous k, ℓ supérieurs à 1,

$$P_{[T>\ell]}([T > k + \ell]) = P(T > k)$$

Déterminez la loi de T.

Exercice n°56

On suppose que le nombre N de clients se présentant dans une boulangerie un jour fixé suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Chaque client achète une baguette avec la probabilité p. Soit X la v.a. égale au nombre de baguettes vendues. Déterminez la loi de X sachant $N = n$, puis la loi de X.

Exercice n°57

1) On se donne deux variables aléatoires X et Y de loi de Poisson de paramètres respectifs λ et μ. On suppose que ces deux variables sont indépendantes c'est-à-dire que, pour toutes valeurs k et ℓ on a

$$\mathbb{P}((X = k) \cap (Y = \ell)) = \mathbb{P}(X = k)\mathbb{P}(Y = \ell)$$

On rappelle que X suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ si, pour tout entier naturel k, on a

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$$

a) Montrer que X a une espérance et une variance (justifier la convergence des deux séries). Calculer l'espérance et la variance de X.

b) Déterminer la loi de la somme $X + Y$.

c) Soit ℓ un nombre entier naturel. Calculer $\mathbb{P}_{(X+Y=\ell)}(X = k)$ (la probabilité que X vaille k sachant que $X + Y$ vaut ℓ) pour k allant de 0 à ℓ.

2) On se donne maintenant une variable aléatoire Z de loi de Poisson de paramètre λ, un paramètre $p \in [0, 1]$ et T une variable aléatoire telle que, pour tous k, ℓ avec $k \leqslant \ell$, on ait :

$$\mathbb{P}_{(Z=l)}(T = k) = \binom{\ell}{k} p^k (1 - p)^{\ell-k}$$

a) Déterminer la loi de T (indication : écrire l'évènement $[T = k]$ comme une réunion d'évènements faisant intervenir Z).

b) Déterminer la loi de $Z - T$.

Exercice n°58 *(Examen 2013/2014)*

1) Soit X une variable aléatoire réelle définie sur un espace probabilisé d'univers Ω. On suppose que $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et que X admet une espérance. Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $[X = k] = [X > k - 1] \cap \overline{[X > k]}$.
En déduire que $E\left(X\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathrm{P}\left(X > k\right)$.

2) Une urne contient des boules, indiscernables au toucher, numérotées de 1 à n. On effectue, au hasard, des tirages avec remise tant que les numéros obtenus forment une suite strictement décroissante.

a) Déterminer la loi de la variable aléatoire X représentant le nombre de tirages effectués.

b) Montrer que X admet une espérance mathématique que l'on calculera. Quelle est la limite de cette espérance quand n tend vers $+\infty$?

Lois conjointes - Variables aléatoires indépendantes

Exercice n°59

Soit X une v.a. géométrique de paramètre p ($0 < p \leqslant 1$).

1) Montrez que $E(X)$ et $\sigma^2(X)$ sont définis et les calculer.

2) Majorez $P(X \geqslant \frac{2}{p})$, en utilisant(i) l'inégalité de Markov, (ii) l'inégalité de Tchebitchev.

Pour $p = \frac{1}{r}$ (r entier supérieur à 2), comparez les estimations précédentes à la valeur exacte de cette probabilité.

Exercice n°60

Soient $X_1, \cdots, X_n$ des v.a. définies sur un espace de probabilité dénombrable $(\Omega, \mathbb{P})$, admettant une espérance et une variance. On note $m_k = \mathbb{E}(X_k)$ et V_n la variance de $\sum_{k=1}^{n} X_k$.

On suppose que $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} V_n = 0$ et on note $M_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(X_k - m_k)$.

1) Exprimer l'espérance et la variance de M_n en fonction de n et de V_n.

2) En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebitchev, montrer que :

$$\forall \varepsilon, \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(|M_n| \geqslant \varepsilon) = 0$$

Exercice n°61

La probabilité d'atteindre une cible est $\frac{1}{5}$. On effectue dix tirs indépendants. Quelle est la probabilité que la cible soit touchée au moins deux fois ? Quelle est la probabilité pour que la cible soit touchée au moins deux fois, sachant qu'elle a été touchée au moins une fois ?

Calculer l'espérance et la variance de la loi binômiale de paramètres (n, p)

On effectue 500 tirs indépendants et on note X le nombre de fois où la cible est touchée. Donner une majoration de $\mathbb{P}\left(\left|\frac{X}{500} - \frac{1}{5}\right| > 10^{-2}\right)$.

Exercice n°62

Un dé équilibré est lancé n fois. Soit X la v.a. égale au nombre de chiffres pairs obtenus et Y la v.a. égale au nombre de 1 obtenus.

1) Pour $n = 2$, explicitez la loi conjointe de X et Y. Calculez $C(X, Y)$.

2) Dans le cas général, calculez $\sigma^2(X)$, $\sigma^2(Y)$, $\sigma^2(X + Y)$ et déduisez-en $C(X, Y)$.

Exercice n°63

X et Y sont deux v.a. indépendantes de même loi : $P(X = k) = q^k(1-q)$. Soit $Z = Max(X, Y)$. Déterminer la loi conjointe de Z et X puis la loi de Z.

Exercice n°64 *(Examen 2012/2013)*

On lance deux fois un dé équilibré.

1) Modéliser l'expérience aléatoire.
On appelle X le nombre de résultats pairs obtenus, Y le nombre de 5 obtenus.

2) Trouver la loi du couple (X, Y), les lois des variables X et Y. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice n°65 *(Contrôle continu 2013/2014)*

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes définies sur un même espace probabilité $(\Omega, \mathscr{T}, \mathbb{P})$ que l'on ne cherchera pas à préciser. On suppose que X et Y suivent toutes deux la loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$: $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}([X = k]) = \mathbb{P}([Y = k]) = p(1-p)^{k-1}$.
On note $U = |X - Y|$ (valeur absolue de $X - Y$) et $V = \min(X, Y)$.

1) Expliciter les ensembles $U(\Omega)$ et $V(\Omega)$. Montrer que

$$\forall (m, n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*,\ [U = m, V = n] = [X = m + n, Y = n] \cup [X = n, Y = m + n]$$

En déduire la loi du couple (U, V).

2) Déterminer la loi de U et la loi de V. Les variables aléatoires U et V sont-elles indépendantes ?

Exercice n°66

On dispose de deux dés, un vert et un rouge, que l'on jette sur une table. Soit X le numéro du dé vert et Y celui du rouge.

1) Donnez la loi du couple (X, Y) et les lois marginales de X et Y. Les v.a. X et Y sont-elles indépendantes ?

2) Donnez les lois des v.a. $M = \max(X, Y)$ et $m = \min(X, Y)$ ainsi que celle du couple (M, m). Les v.a. M et m sont-elles indépendantes ?

Exercice n°67

Une urne contient s boules blanches et $r - s$ boules noires. On effectue dans cette urne n $(n \leqslant r)$ tirages au hasard sans remise.

1) Quelle est la loi de la v.a. X égale au nombre de boules blanches obtenues ?

2) Soit, pour $1 \leqslant k \leqslant n$, X_k la v.a. égale à 1 si la boule obtenue au k-ième tirage est blanche et égale à 0 sinon. Calculez $E(X_k)$, $\sigma^2(X_k)$ et, pour $l \neq k$, $C(X_k, Y_l)$.
Les v.a. X_k et X_l sont-elles indépendantes ? Déterminez $E(X)$ et $\sigma^2(X)$.

Exercice n°68

$X_1, \cdots, X_n$ désignent des v.a. indépendantes de même loi de Bernoulli de paramètre $0 < p \leqslant 1$. Soit T la v.a. à valeurs dans $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ définie par : $T(\omega) = \inf\{k | 1 \leqslant k \leqslant n,\ X_k(\omega) = 1\}$ si cet ensemble est non vide et $T(\omega) = +\infty$ dans le cas contraire.

1) Si les v.a. X_i sont interprétées comme les résultats de n jeux de pile ou face indépendants, expliquez la signification de T.

2) Calculez $P(T = k)$ pour k allant de 1 à n et $P(T = +\infty)$.

3) Déterminez les limites des probabilités précédentes lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice n°69

Soit (X_n) une suite de v.a. indépendantes de Bernoulli de paramètre p où $p \in]0, 1[$.

1) On pose $A_n = \{\omega | X_n(\omega) \neq X_{n-1}(\omega)\}$. Calculer $\mathbb{P}(A_n \cap A_{n+1})$ pour $n \geqslant 2$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que les A_n soient indépendants.

2) On pose $Y(\omega) = \inf \{n \geqslant 2 | \omega \in A_n\}$. Exprimer $[Y = r]$ à l'aide des X_i et déduisez-en la loi de Y. Calculer $\mathbb{E}(Y)$ et $Var(Y)$ lorsque $p = \dfrac{1}{2}$.

Exercice n°70

Soient X et Y deux v.a. indépendantes uniformément réparties sur $\{1, 2, \cdots, n\}$.

1) Calculez $E(X)$, $E(X^2)$ et $V(X) = E([X - E(X)]^2)$.

2) Déterminez la loi de $X + Y$ et calculez $E(X + Y)$.

Exercice n°71

X et Y désignent deux v.a. de lois de Poisson indépendantes de paramètres respectifs λ et μ.

1) Montrez $X + Y$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda + \mu$.

2) Montrez que la loi de X sachant $X + Y = n$ est binômiale de paramètres n et $\dfrac{\lambda}{\lambda + \mu}$.

Variables aléatoires continues - Densité de probabilité

Exercice n°72

Soit $a \geqslant 0$. On considère la fonction f_a définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f_a(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ e^{-x} + a & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0 & \text{si } x > 1 \end{cases} \qquad \text{c'est à dire } f_a(x) = (e^{-x} + a)\, \mathbb{1}_{[0,1]}(x)$$

1) Montrer qu'il existe une unique valeur α de a pour laquelle f_α est une densité de probabilité. Calculer cette valeur.

2) Soit X une variable aléatoire de loi de densité f_α.
Calculer les probabilités $\mathbb{P}(X < 1)$, $\mathbb{P}(X = 1/2)$ et $\mathbb{P}(X > 1/2)$.
Calculer l'espérance et la variance de X.

Exercice n°73 *(Contrôle continu 2013/2014)*

Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{e^{-x}}{(1 + e^{-x})^2}$.

1) Montrer que f est une densité de probabilité.

2) Soit X une variable aléatoire réelle ayant f pour densité. Déterminer la fonction de répartition de X.

3) Soit φ la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\varphi(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$. Étudier les variations de φ. Montrer que φ est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]-1,1[$ et déterminer sa bijection réciproque.

4) On définit une variable aléatoire réelle Y par : $Y = \varphi(X) = \dfrac{e^X - 1}{e^X + 1}$.

Déterminer la fonction de répartition et une densité de Y. Quelle est la loi de Y ?

Exercice n°74

Pour chacune des fonctions suivantes, dire si elles sont des densités de probabilité sur $\mathbb{R}$. Si tel est le cas, déterminer la fonction de répartition et étudier l'existence et la valeur éventuelle des espérances et variances correspondantes.

1) $f(x) = \dfrac{1}{\pi}\dfrac{1}{1+x^2}$ 2) $f(x) = 2bxe^{-bx^2}\mathbb{1}_{]0,+\infty[}(x) \quad (b > 0)$

3) $f(x) = \dfrac{1}{2}e^{-|x|}$ 4) $f(x) = (\sin x)\mathbb{1}_{[0,3\pi/2]}(x)$

Exercice n°75

Calculer l'espérance, la médiane, le mode, la variance, l'écart-type et tracer la fonction de répartition

1) de la loi uniforme sur $[a, b]$ donnée par sa densité : $f(x) = \dfrac{1}{(b-a)}\mathbb{1}_{[a,b]}(x)$

2) de la loi normale $\mathcal{N}(m,\sigma^2)$ donnée par la densité $f(x) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$.

Exercice n°76

1) Soit X une variable aléatoire de loi gaussienne $\mathcal{N}(0, 1)$.
Calculer la probabilité des évènements $\{0 \leqslant X \leqslant 2\}$, $\{X \geqslant 2\}$, $\{X \geqslant 3\}$, $\{|X| \geqslant 2,575\}$, ainsi que la valeur de x pour laquelle $\mathbb{P}\{|X| > x\} = 0,05$.

2) Soit Y une autre variable aléatoire, de loi gaussienne $\mathcal{N}(\mu = 50, \sigma^2 = 100)$.
Calculer la probabilité des évènements $\{Y \geqslant 0\}$, $\{30 \leqslant Y \leqslant 70\}$, ainsi que la valeur de y pour laquelle $\mathbb{P}\{Y \geqslant y\} = 0,05$.

3) Dans une école regroupant mille élèves, la taille des élèves se répartit approximativement selon une loi normale de moyenne 150 cm et d'écart-type 15 cm. Quel est le nombre approximatif d'élèves dont la taille est supérieure à 165 cm ? à 180 cm ? Dont la taille est comprise entre 135 et 165 cm ? entre 140 et 180 cm ? (On pourra utiliser une table de loi normale.)

Exercice n°77

Une usine fabrique des pièces d'un certain type. Ces pièces doivent avoir un diamètre compris entre 6 et 6,1 cm.
Lorsque le diamètre d'une pièce est inférieur à 6 cm, elle doit être jetée. Lorsque le diamètre est supérieur à 6,1 cm, la pièce doit être réusinée.
Pour fabriquer ces pièces, un industriel a le choix entre deux machines A et B. La machine A (resp. B) fabrique des pièces dont le diamètre suit une loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ avec $m = 6,05\ cm$ et $\sigma = 0,5$ mm (resp.

$m = 6,05$ cm et $\sigma = \ 0,2$ mm).
Le coût unitaire de fabrication est 1 euro la pièce et 0,5 euro le réusinage pour la machine A (resp. 1,1 euro et 0,6 euro pour B).
Quelle est la machine qui donnera le meilleur rapport ?

Exercice n°78

Soit X une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre λ, c'est-à-dire de densité de probabilité f où

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geqslant 0. \end{cases}$$

1) Pour $s, t \geqslant 0$, calculer $\mathbb{P}(X > t)$ et $\mathbb{P}(X > t + s | X > s)$. En déduire que la loi exponentielle correspond à un phénomène sans mémoire.

2) Montrer que cette propriété est aussi vraie pour une variable aléatoire discrète suivant une loi géométrique de paramètre p.

3) Calculer $\mathbb{P}_X(J)$ pour $J = [\frac{1}{4}, \frac{1}{3}]$ et pour $J =]\frac{1}{4}, \frac{1}{3}]$.

4) Pour $x > 0$, on pose $F(x) = \mathbb{P}_X([0, x[)$. Expliciter F et tracer sa courbe représentative.

Exercice n°79

Soit X une v.a. de loi exponentielle de paramètre λ. Calculer l'espérance de la v.a. X^k ($k \in \mathbb{N}$) ainsi que la variance de X^k.

Exercice n°80

Soit (Ω, P) un espace de probabilité continu et $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une variable aléatoire continue suivant la loi uniforme sur $[0, 1]$. On pose $Y = \min\{X, 1 - X\}$.

1) Quelle est la fonction de répartition de Y ?

2) En déduire que Y suit la loi uniforme sur $[0, 1/2]$.

3) Calculer l'espérance et la variance de Y.

Exercice n°81 *(CAPES 2014 - deuxième composition)*

Soit X une v.a. de loi $\mathscr{N}(0, 1)$. On pose $Y = X^2$.

1) Donner l'espérance de la variable aléatoire Y et démontrer que la variance de cette variable aléatoire vaut 2.

2) Déterminer la densité de probabilité de la variable aléatoire Y. Cette variable aléatoire suit-elle une loi normale ?

Exercice n°82

On suppose que la v.a. aléatoire égale au nombre de voitures arrivant à un péage d'autoroute entre les instants 0 et t suit une loi de Poisson de paramètre λt avec $\lambda > 0$. Pour n dans $\mathbb{N}^*$, on note X_n l'instant d'arrivée de la n-ième voiture.

1) Déterminer $\mathbb{P}(X_1 > t)$ et en déduire la loi de X_1 ainsi que son espérance et sa variance.

2) Montrer que, pour $t > 0$, et $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(X_n \leqslant t) = 1 - e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\lambda t)^k}{k!}$. En déduire la densité de X_n ainsi que son espérance et sa variance.

Exercice n°83

On considère (Ω, P) où $\Omega = [0, 1]$ et P est la probabilité uniforme sur $[0, 1]$. Soit X la fonction de Ω dans $\mathbb{R}$ définie par $X(\omega) = e^{\omega}$. Montrer que X est une variable aléatoire à densité (on déterminera la fonction de répartition et la densité de X).

Exercice n°84

On considère un type d'ampoule A dont la durée de vie, notée X, suit une loi exponentielle de paramètre λ.

1) Calculer l'espérance et la variance de X.

2) Supposons que deux ampoules de type A éclairent un passage souterrain. Leurs durées de vie, notées X_1 et X_2, suivent la même loi que X et sont indépendantes. Exprimer en fonction de X_1 et X_2 le temps Z pendant lequel le passage est éclairé (c'est-à-dire le temps pendant lequel l'une au moins des deux ampoules fonctionne).

- **a)** si le branchement est fait en série
- **b)** si le branchement est fait en parallèle

Exercice n°85

Le diamètre d'un palier supportant un arbre de transmission doit excéder de 5 à 20 mm le diamètre de l'arbre pour que l'assemblage soit fonctionnel. En supposant que le diamètre de l'arbre suit une loi normale de moyenne 10 cm et d'écart-type 1 mm et que le diamètre du palier suit une loi normale de moyenne 11 cm et d'écart-type 2 mm, calculer la probabilité que l'assemblage d'un palier et d'un arbre pris au hasard de façon indépendante soit fonctionnel.

Exercice n°86

Une firme construit un appareil électronique en grande série. Cet appareil est formé de divers éléments que l'on supposera infiniment résistants, sauf deux d'entre eux, que l'on baptisera E_1 et E_2, dont la durée de vie est courte. Les durées de vie de E_1 et E_2 sont connues par leurs distributions de probabilité qui sont approximativement normales et dont les caractéristiques sont les suivantes.

– Pour E_1 : durée moyenne de vie 1500 h, écart-type 150 h.
– Pour E_2 : durée moyenne de vie 1800 h, écart-type 200 h.

1) On prend un appareil au hasard et on le fait fonctionner. Quelle est la probabilité qu'il soit encore en marche sans avoir eu de panne au bout de 1400 h ? de 1600 h ?

2) Quelle est la probabilité qu'au bout de 1600 h on ait dû changer un élément et un seul ?

3) Quelle est la probabilité qu'au bout de 1600 h on ait dû changer au moins un élément ?

Exercice n°87

Une société minière exploite deux gisements. Le premier a une production journalière moyenne de 2000 tonnes avec un écart-type de 150 tonnes. Le deuxième a une production journalière moyenne de 3000 tonnes avec un écart-type de 200 tonnes. Quelle est la probabilité que la production journalière moyenne de la société excède 5200 tonnes ? (On admettra que les production journalière des deux gisements sont normales et indépendantes.)

Exercice n°88

Des mesures effectuées par un appareil de pesage sont entâchées d'une imprécision aléatoire de loi $\mathscr{N}(0, \frac{1}{4})$. En d'autres termes, pour un objet de poids exact m, l'appareil donnera une mesure $Y = m + X$ où X est une variable aléatoire de loi $\mathscr{N}(0, \frac{1}{4})$.

1) Donner la probabilité pour que X soit plus grande que $\frac{1}{2}$, pour que $|X|$ soit plus grande que $\frac{1}{2}$. Trouver le nombre s tel que $\mathbb{P}(|X| \leqslant s) \geqslant 0,99$.

2) Pour améliorer la précision de sa mesure, un expérimentateur décide d'effectuer n pesées et de faire la moyenne des résultats obtenus. On note alors $Y_1, \cdots, Y_n$ le résultat des pesées successives et $X_1, \cdots, X_n$ les erreurs correspondantes (si le poids exact est m, on a $Y_i = m + X_i$). On suppose les variables aléatoires $X_1, \cdots, X_n$ indépendantes toujours de loi $\mathscr{N}(0, \frac{1}{4})$. On note enfin $\overline{Y_n} = \dfrac{1}{n}(Y_1 + \cdots + Y_n)$ (résultat moyen) et $\overline{X_n} = \dfrac{1}{n}(X_1 + \cdots + X_n)$.

a) Donner une relation entre $\overline{Y_n}$ et $\overline{X_n}$.

b) Montrer que $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ suit la loi $\mathscr{N}(0, \frac{n}{4})$. Donner la loi de $\overline{X_n}$. L'idée de faire une moyenne d'observations pour améliorer la précision vous paraît-elle pertinente ?

c) Trouver le nombre de pesées nécessaires pour que $\mathbb{P}(\left|\overline{X_n}\right| \leqslant \frac{1}{2}) \geqslant 0,99$.

Théorèmes de convergence - Approximation

Exercice n°89

Au R.U., deux légumes sont proposés : haricots verts ou épinards. Les cinq cents clients quotidiens du R.U. choisissent indépendamment les uns des autres les haricots verts avec probabilité 0,5 ou les épinards avec probabilité 0,5.

1) Pour être sûr d'avoir assez de parts de chacun des légumes, combien doit-on en prévoir ?

2) Pour éviter le gaspillage, on décide de prévoir assez de parts pour qu'il y ait moins de une chance sur vingt (soit une probabilité de 0,05) pour que certains étudiants ne puisse pas choisir des épinards. On note S le nombre d'étudiants choisissant les épinards.

a) Quelle loi suit la variable aléatoire S ?

b) Déterminer N pour que $\mathbb{P}(S > N)$ soit inférieur à 0,05 :

i) en utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev,

ii) en utilisant l'approximation donnée par le théorème central limite.

Exercice n°90

Un transporteur aérien a observé que 10% en moyenne des personnes ayant réservé un siège pour un vol ne se présentent pas au départ. S'il accepte jusqu'à 240 réservations alors qu'il ne dispose que de 230 sièges pour ce vol, quelle est la probabilité que toutes les personnes qui se présentent au départ aient un siège ?

Exercice n°91 *(Examen 2011/2012)*

On lance 2000 fois une pièce de monnaie équilibrée.

1) Modéliser mathématiquement l'expérience (associer à cette expérience un espace de probabilité $(\Omega, \mathbb{P})$ et une suite finie de variables).

2) On appelle S le nombre de « pile » obtenus. Quelle est la loi de S ?

3) Donner sous forme littérale la probabilité exacte de l'évènement « S est compris entre 950 et 1050 ».

4) Donner, en utilisant le théorème de De Moivre-Laplace, une valeur approchée de la probabilité que le nombre de pile soit compris entre 950 et 1050.

Exercice n°92

Dans la population française de taille N (environ 60.000.000) un certain nombre N_1 d'individus présentent un caractère C. Pour évaluer la proportion $p = N_1/N$ on effectue une étude sur $n = 2500$ personnes. On note X_n le nombre d'individus présentant le caractère C parmi ces n personnes.

1) Donner la loi exacte de X_n. Par quelle loi plus simple peut-on la remplacer sans trop se tromper ?

2) Montrer que $p(1-p) \leqslant 1/4$. En déduire l'inclusion

$$\left[\frac{|X_n - np|}{\sqrt{np(1-p)}} \leqslant s\right] \subset \left[\frac{X_n}{n} - \frac{s}{2\sqrt{n}} \leqslant p \leqslant \frac{X_n}{n} + \frac{s}{2\sqrt{n}}\right]$$

3) Que dire de la loi de la variable aléatoire $\dfrac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$?

Donner une valeur approchée du nombre s tel que $\mathbb{P}\left(\dfrac{|X_n - np|}{\sqrt{np(1-p)}} \leqslant s\right) = 0,95.$

4) Déduire des questions précédentes que l'intervalle $\left[\dfrac{X_n}{n} - \dfrac{1}{\sqrt{n}}, \dfrac{X_n}{n} + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right]$ contient la proportion p avec une probabilité supérieure à 0,95.

Exercice n°93 *(Examen 2012/2013)*

Combien de fois faut-il lancer une pièce équilibrée pour que la proportion de « pile » soit comprise entre 0,49 et 0,51 avec probabilité supérieure à 0,99 ?

On donnera une estimation en utilisant l'approximation fournie par le théorème de De Moivre - Laplace.

Exercice n°94

Une proportion p d'une population fume. Combien doit-on sonder de personnes pour avoir une valeur de p à 0,05 près avec une certitude de 95 pour 100 ?

Exercice n°95

1000 passagers montent au hasard dans deux wagons d'un train. Quel est le nombre minimum de places assises par wagon que la compagnie doit prévoir pour être sûre à 99 pour 100 que chaque passager sera assis ?

Exercice n°96

Une personne sur 100 est daltonienne. Au conseil de révision pour le service militaire, la visite médicale permet de recenser les daltoniens. On note F_n le pourcentage de daltoniens sur n conscrits. En utilisant une approximation de loi, déterminer une valeur de n à partir de laquelle ce pourcentage se trouve dans l'intervalle $[0.009, 0.011]$ avec une probabilité supérieure à 0.9.