

Feuille d'exercices d'analyse

Suites numériques

Exercice n°1

Étudier la nature des suites (u_n) définies par :

$$\begin{array}{lll}
 \text{a) } u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} & \text{b) } u_n = \frac{n + (-1)^n}{n + \ln n} & \text{c) } u_n = \frac{a^n - b^n}{a^n + b^n} \text{ pour } a > 0 \text{ et } b > 0 \\
 \text{d) } u_n = \frac{n^2 + \cos n}{2^n + \sin n} & \text{e) } u_n = \prod_{p=2}^n \left(1 - \frac{1}{p}\right) &
 \end{array}$$

Exercice n°2 (CAPES 2009 - Oral 2)

On considère une suite numérique (u_n) positive et la suite (v_n) définie par $v_n = \frac{u_n}{1 + u_n}$. Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier dans chaque cas.

- 1) La suite (v_n) est bornée.
- 2) Si la suite (u_n) est croissante, alors la suite (v_n) est croissante.
- 3) Si la suite (u_n) est convergente, alors la suite (v_n) est convergente.
- 4) Si la suite (v_n) est convergente, alors la suite (u_n) est convergente.

Exercice n°3

Étudier la nature des suites (u_n) définies par :

$$\begin{array}{lll}
 \text{a) } u_n = \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2 + k} & \text{b) } u_n = \sum_{k=1}^n \frac{n}{\sqrt{n^2 + k}} & \text{c) } u_n = \frac{1}{n!} \sum_{k=1}^n k! \\
 \text{d) } u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} & \text{e) } u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} & \text{f) } u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}
 \end{array}$$

Exercice n°4 (CAPES 2012 - Première composition)

On considère la suite $(H_n)_{n \geq 1}$ définie par $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

Montrer que pour tout entier $k \geq 1$, $\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leq \frac{1}{k}$. En déduire que $H_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \ln n$.

Exercice n°5

- 1) (d'après CAPES 2014 - Oral 2) Un magazine est vendu uniquement par abonnement. Le modèle économique prévoit qu'il y ait 1 800 nouveaux abonnés chaque année et que d'une année sur l'autre, 15 % des abonnés ne se réabonnent pas. En 2013, il y avait 8 000 abonnés.

Pour tout entier naturel n , on note u_n le nombre de milliers d'abonnés prévus en $(2013 + n)$. Expliciter une relation entre u_{n+1} et u_n puis donner l'expression de u_n en fonction de n .

- 2) (CAPES 2016 - Oral 2) On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 7$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 10u_n - 18$. Déterminer, pour tout entier naturel n , l'expression de u_n en fonction de n .

Exercice n°6 (CAPES 2007 - Oral 2)

Soit (x_n) la suite définie par
$$\begin{cases} x_{n+1} &= \frac{1}{2}x_n + \frac{1}{2^n} \\ x_0 &= 1 \end{cases}$$

- 1) Déterminer x_1, x_2, x_3 et x_4 , en laissant les résultats sous forme fractionnaire.
- 2) Montrer que la suite (x_n) est décroissante à partir du rang $n = 1$.
- 3) Montrer que la suite (x_n) est convergente et déterminer sa limite.
- 4) Conjecturer l'expression générale de x_n en fonction de n et démontrer cette égalité.

Exercice n°7 (CAPES 2013 - Oral 2)

Soit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 3u_n - 2n + 3$.

- 1) Montrer que pour tout entier naturel $n, u_n \geq n$.
- 2) En déduire les variations et la limite de la suite (u_n) .
- 3) Construire un algorithme qui prend en entrée un réel A strictement positif et renvoie le plus petit entier n tel que $u_n > A$.

Exercice n°8

Les suites (u_n) et (v_n) convergent-elles ?

$$\text{a) } u_n = \sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k+1} \frac{1}{k} \quad \text{et} \quad v_n = u_n + \frac{1}{2n+1} \qquad \text{b) } u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^3} \quad \text{et} \quad v_n = u_n + \frac{1}{n^2}$$

Exercice n°9

On définit la suite (u_n) par $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}}$. Montrer que les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont adjacentes.

Conclusion ?

Exercice n°10 (CAPES 2015 - Première composition)

On considère la suite définie pour tout entier naturel $n \geq 1$ par $a_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

Démontrer que, pour tout entier $n \geq 1, a_{2n} - a_n \geq \frac{1}{2}$. La suite $(a_n)_{n \geq 1}$ est-elle convergente ?

Exercice n°11 (CAPES 2013 - Première composition)

On rappelle que $e = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}$. On se propose de démontrer que le nombre e est un nombre irrationnel. Pour cela, on fait l'hypothèse qu'il existe p et q , entiers naturels non nuls, tels que $e = \frac{p}{q}$ et on démontre que cette hypothèse conduit à une contradiction.

Pour tout entier naturel n non nul, on pose : $u_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n \times n!}$. Démontrer que les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont adjacentes, puis montrer que : $u_q < e < v_q$.

Aboutir à une contradiction en multipliant les termes de cet encadrement par $q! \times q$.

Exercice n°12 (CAPES 2010 - Première composition)

- 1) Soit $p \in \mathbb{N}$. Montrer que la suite $\left(\frac{1}{2^n} \binom{n}{p}\right)_{n \geq p}$ converge vers 0.
- 2) Soit $(u_p)_{p \in \mathbb{N}}$ une suite réelle convergeant vers 0. Montrer que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} u_p = 0$. (On pourra, un réel $\varepsilon > 0$ étant donné, choisir un entier k suffisamment grand pour que $\left|\frac{1}{2^n} \sum_{p=k+1}^n \binom{n}{p} u_p\right| < \frac{\varepsilon}{2}$.)

Exercice n°13 (CAPES 2015 - Première composition)

À toute suite $(u_n)_{n \geq 1}$, on associe la suite $(v_n)_{n \geq 1}$ définie par $\forall n \geq 1, v_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u_k$. On dit que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ converge au sens de CESÀRO si la suite $(v_n)_{n \geq 1}$ converge.

- 1) Soit $(u_n)_{n \geq 1}$ une suite de limite nulle et $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$.
- a) Montrer qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que, pour tout $n \geq n_0$, $\frac{1}{n} \left(\sum_{k=1}^{n_0} u_k\right) - \varepsilon \leq v_n \leq \frac{1}{n} \left(\sum_{k=1}^{n_0} u_k\right) + \varepsilon$.
- b) En déduire que la suite $(v_n)_{n \geq 1}$ converge vers 0.
- 2) Énoncer et démontrer la généralisation du résultat précédent au cas où la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ converge vers un réel ℓ quelconque.
- 3) La réciproque de ce dernier résultat est-elle exacte ?

Fonctions - Fonctions continues

Exercice n°14

Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{x^3 \sin^3 x - x^2 \cos^2 x + x \sin x - 3}{x^2 \cos x + 20}$ pour $x \in [-1, 4]$. Trouver deux nombres réels a, b tels que $a \leq f(x) \leq b$ pour tout x de l'intervalle $[-1, 4]$.

Exercice n°15

- Soit $f : x \mapsto \cos x + x^4$ et $x_0 = \ln 5$ (donc $1 < x_0 < 2$). On veut calculer $f(x_0)$ avec une précision de 10^{-2} .
- a) Trouver un réel $\eta_1 > 0$ tel que pour tout x vérifiant $|x - x_0| < \eta_1$, on ait $|\cos x - \cos x_0| < 0,005$. On pourra utiliser la factorisation de $\cos p - \cos q$ et la majoration $|\sin x| \leq |x|$.
- b) Trouver un réel $\eta_2 > 0$ tel que pour tout x vérifiant $|x - x_0| < \eta_2$, on ait $|x^4 - x_0^4| < 0,005$.
- c) En déduire un réel $\eta > 0$ tel que pour tout x vérifiant $|x - x_0| < \eta$, on ait $|f(x) - f(x_0)| < 10^{-2}$.

Exercice n°16

Soit f une fonction définie sur \mathbb{R} , admettant une période strictement positive t . Montrer que si f a une limite en $+\infty$, alors f est constante.

Exercice n°17

Soit k un réel strictement positif et différent de 1. Soit f une fonction définie sur \mathbb{R} telle que, pour tout réel x , $f(kx) = f(x)$. Montrer que si f est continue à l'origine, elle est constante.

Exercice n°18

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. On note $E = \{x \in [a, b] | f(x) = 0\}$. Montrer que si E n'est pas vide, alors $\sup E$ est un élément de E .

Exercice n°19

1) (CAPES 2011 - Première composition; CAPES 2014 - Deuxième composition)

Soient a et b deux réels tels que $a < b$ et soit f une fonction continue sur $[a, b]$, à valeurs dans $[a, b]$.

a) Montrer que f a au moins un point fixe : il existe c dans $[a, b]$ tel que $f(c) = c$.

b) Peut-on assurer l'unicité du point fixe si on suppose f en outre strictement décroissante (respectivement strictement croissante) ?

2) Soit $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ continue et telle que $f(0) = f(2)$. Montrer que l'équation $f(x) = f(x + 1)$ a au moins une solution.

Exercice n°20 (CAPES 2011 - Oral 2 (sujet zéro))

Un marcheur a parcouru 10 km en une heure. Existe-t-il un intervalle d'une demi-heure pendant lequel il a parcouru exactement 5 km ? Voici comment on se propose de résoudre ce problème :

Pour t appartenant à l'intervalle $[0, 1]$, on désigne par $f(t)$ la distance, en kilomètres, parcourue à l'instant t , en heures. Il est naturel de faire l'hypothèse que f est une fonction continue sur $[0, 1]$.

1) Préciser $f(0)$ et $f(1)$. Écrire l'équation traduisant le problème.

2) Soit g la fonction définie sur l'intervalle $[0, 1]$ par $g(t) = f(t + \frac{1}{2}) - f(t)$. Démontrer que l'équation $g(t) = 5$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[0, \frac{1}{2}]$. Conclure.

Exercice n°21

Soit $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ continue. On suppose que f admet la même limite finie ℓ en a et b . Montrer que f n'est pas injective sur $]a, b[$.

Exercice n°22 (d'après CAPES 1993)

Soit $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ continue et ayant une limite finie ℓ en $+\infty$. Montrer que f est bornée sur $[0, +\infty[$ et atteint au moins une de ses bornes.

Exercice n°23

Soit $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ continue telle que pour tout $x > 0$, $|f(x)| < x$. Calculer $f(0)$. Montrer qu'à tout couple (a, b) de réels vérifiant $0 < a < b$, on peut associer un nombre k de $]0, 1[$ tel que, pour tout x de $]a, b[$, $|f(x)| \leq kx$. Est-ce vrai pour les couples $(0, b)$?

Exercice n°24 (CAPES 2012 - Première composition)

1) Montrer que pour tous réels x et y on a $||y| - |x|| \leq |y - x|$. En déduire que $f : x \mapsto \frac{1}{1 + |x|}$ est uniformément continue sur \mathbb{R} .

2) Montrer que pour tous réels positifs x et y on a $\sqrt{x + y} \leq \sqrt{x} + \sqrt{y}$ et $|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq \sqrt{|x - y|}$. En déduire que $g : x \mapsto \sqrt{x}$ est uniformément continue sur \mathbb{R}^+ .

Exercice n°25 (CAPES 2014ex - Première composition)

Soient a et b deux réels tels que $a < b$ et f une fonction continue sur $[a, b]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $k \in [0, n]$, on pose : $x_k = a + k \frac{b - a}{n}$.

1) Démontrer que : $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall (x, y) \in [a, b]^2, |x - y| \leq \eta \implies |f(x) - f(y)| \leq \frac{\varepsilon}{b - a}$.

2) Soit ε un réel strictement positif. Démontrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \geq N, \forall k \in \llbracket 0, n - 1 \rrbracket, \forall t \in [x_k, x_{k+1}], |f(t) - f(x_k)| \leq \frac{\varepsilon}{b - a}$$

Exercice n°26 (CAPES 2012 - Première composition)

Soit $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ uniformément continue.

On se propose de montrer qu'il existe deux réels a et b tels que, pour tout $x \in \mathbb{R}^+ : f(x) \leq ax + b$.

1) Justifier l'existence d'un réel η_1 strictement positif tel que :

$$\exists \eta_1 > 0, \forall (x, y) \in (\mathbb{R}^+)^2, (|x - y| \leq \eta_1 \implies |f(x) - f(y)| \leq 1)$$

Soit $x_0 \in \mathbb{R}^+$.

2) Soit n_0 le plus petit entier tel que $\frac{x_0}{n_0} \leq \eta_1$; justifier l'existence de n_0 et exprimer n_0 en fonction de x_0 et de η_1 .

3) Montrer que $|f(x_0) - f(0)| \leq \sum_{k=0}^{n_0-1} \left| f\left(\frac{(k+1)x_0}{n_0}\right) - f\left(\frac{kx_0}{n_0}\right) \right|$

4) Conclure.

Exercice n°27

1) a) Montrer que les fonctions $f : x \mapsto e^{-x}$ et $g : x \mapsto |x|$ sont convexes sur \mathbb{R} .

b) Soit $h : x \mapsto e^{-|x|}$. Vérifier que $h(0) > \frac{1}{2}(h(1) + h(-1))$. h est-elle convexe sur \mathbb{R} ?

2) Soient $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ convexes. On pose $h = f \circ g$.

a) Peut-on affirmer que h est convexe sur \mathbb{R} ?

b) On suppose en outre f croissante sur \mathbb{R} . Montrer que h est convexe sur \mathbb{R} .

Exercice n°28 (CAPES 2013 - Première composition)

On considère une fonction f convexe sur un intervalle I , $(x_1, \dots, x_n) \in I^n$, $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}_+^n$, avec $\sum_{k=1}^n \lambda_k = 1$.

Démontrer que : $f\left(\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k\right) \leq \sum_{k=1}^n \lambda_k f(x_k)$. On pourra procéder par récurrence sur n en remarquant que

$$\text{si } \lambda_n \neq 1 : \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k = \lambda_n x_n + (1 - \lambda_n) \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{\lambda_k}{1 - \lambda_n} x_k \right)$$

Exercice n°29

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe et bornée.

1) Soit a un réel quelconque. On pose $g_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$.

a) Montrer que g_a est croissante sur l'intervalle $[a, +\infty[$ (on pourra, pour $a < x < y$, écrire x sous la forme $x = ta + (1 - t)y$, pour un t convenablement choisi).

Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} g_a(x) = 0$.

- b) En déduire que f est décroissante sur \mathbb{R} .
- 2) Montrer que $\hat{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f(-x)$ est aussi convexe et bornée. Qu'en déduit-on pour f ?
- 3) Énoncer un résultat résumant cet exercice.

Fonctions dérivables - Formules de Taylor

Exercice n°30

Pour tout réel λ , $-1 \leq \lambda \leq 1$, on considère la fonction f_λ donnée par $f_\lambda(x) = \ln(x^2 - 2\lambda x + 1)$. Soit C_λ la courbe représentative de f_λ dans un repère orthonormal (O, \vec{i}, \vec{j}) .

- 1) Déterminer suivant les valeurs de λ l'ensemble de définition de f_λ et montrer que la droite d'équation $x = \lambda$ est un axe de symétrie pour C_λ .
Par quelle transformation géométrique simple peut-on déduire $C_{-\lambda}$ de C_λ ?
- 2) Étudier, en discutant suivant les valeurs de λ , la fonction f_λ . On précisera les variations, les limites aux bornes de l'ensemble d'étude et les branches infinies éventuelles.
- 3) Soit M_0 un point du plan de coordonnées (x_0, y_0) . Combien de courbes C_λ passent par M_0 ?

Exercice n°31

Soit $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue qui ne s'annule pas sur $]a, b[$. Montrer que si la fonction carrée f^2 est dérivable, il en est de même de f .

Exercice n°32 (CAPES 2011 - Première composition)

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I d'intérieur non vide et soit $(a, b) \in I^2$ avec $a < b$. On suppose $f'(a) < f'(b)$ et on considère $\lambda \in]f'(a), f'(b)[$. Soit g la fonction définie sur I par $g(x) = f(x) - \lambda x$.

- 1) Justifier l'existence d'un $c \in [a, b]$ tel que $g(c) = \inf_{x \in [a, b]} g(x)$ et montrer que $c \notin \{a, b\}$.
- 2) En déduire que f' vérifie la propriété des valeurs intermédiaires.
- 3) Donner alors un exemple de fonction définie sur \mathbb{R} ne possédant pas de primitive sur \mathbb{R} .

Exercice n°33

- 1) Soit $\alpha > 0$. À l'aide du théorème des accroissements finis appliqué à $x \mapsto \frac{1}{x^\alpha}$, montrer que pour tout n de $\mathbb{N} - \{0, 1\}$, $\frac{1}{n^{1+\alpha}} < \frac{1}{\alpha} \left(\frac{1}{(n-1)^\alpha} - \frac{1}{n^\alpha} \right)$.
- 2) En déduire que la suite donnée par $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha}$ converge pour $\alpha > 1$.

Exercice n°34

On définit la fonction f de la variable réelle x par $f(x) = x + 2x^2 \sin \frac{1}{x}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.

- 1) Montrer que f est continue sur \mathbb{R} .
- 2) À l'aide de la définition de la dérivée, montrer que f est dérivable en 0 et que $f'(0) = 1$.
- 3) Peut-on en déduire que f est croissante près de 0 ?

4) Montrer que sur tout intervalle $[-\alpha, \alpha]$ il existe des points où f' vaut 1 et des points où f' vaut -1 .

5) Qu'en déduit-on du point de vue de la monotonie de f au voisinage de 0 ?

Exercice n°35

Soit $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 telle que $f(-1) = f(1) = 0$.

Montrer que, pour tout α de $] -1, 1[$, il existe un polynôme P de degré ≤ 2 tel que la fonction $g = f + P$ s'annule en $-1, 1$ et α . En déduire que $f(\alpha) = \frac{\alpha^2-1}{2}f''(c)$ où $c \in] -1, 1[$, puis que :

$$\sup_{x \in [-1, 1]} |f(x)| \leq \frac{1}{2} \sup_{x \in [-1, 1]} |f''(x)|$$

Exercice n°36

Soit f une fonction à valeurs dans \mathbb{R} , de classe C^2 sur \mathbb{R} . On suppose que $f(0) = f'(0) = 0$. On pose

$$g(x) = \begin{cases} f(\sqrt{x}) & \text{si } x \geq 0 \\ f(-\sqrt{-x}) & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

1) Vérifier que g est de classe C^1 sur chacun des intervalles $] -\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$.

2) Vérifier que g est continue sur \mathbb{R} .

3) Calculer $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} g'(x)$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} g'(x)$.

4) Donner une condition nécessaire et suffisante, portant sur $f''(0)$, pour que g soit de classe C^1 sur \mathbb{R} .

Exercice n°37 (CAPES 2000)

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $L_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto \frac{d^n}{dt^n}(t^2 - 1)^n$. Montrer que $L_n(1) = 2^n n!$ et calculer $L_n(-1)$.

Exercice n°38 (d'après CAPES 2002)

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable solution sur \mathbb{R} de l'équation $f(x) = x f'(\frac{x}{2})$.

1) Montrer que f est de classe C^1 sur \mathbb{R} .

2) On suppose en outre f de classe C^n ($n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$). En utilisant la formule de Taylor-Young, montrer que, pour tout entier p compris entre 1 et n , on a : $f^{(p)}(0) = 0$ ou $p2^{1-p} = 1$.

Exercice n°39 (CAPES 1991)

Soit f une fonction positive, de classe C^2 sur \mathbb{R} et telle que f'' soit bornée sur \mathbb{R} .

1) On note $M = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f''(x)|$.

a) Montrer, en appliquant la formule de Taylor avec reste de Lagrange à la fonction f que, pour tout couple de réels (x, λ) on a : $f(x) + \lambda f'(x) + \frac{\lambda^2}{2} M \geq 0$.

b) En déduire que pour tout réel x on a : $|f'(x)| \leq \sqrt{2M \cdot f(x)}$.

2) Soit x_0 un réel tel que $f(x_0) = 0$. On pose $g = \sqrt{f}$.

a) Montrer que pour tout réel x , $x \neq x_0$, il existe un réel c compris entre x_0 et x tel que :

$$f(x) = \frac{1}{2}(x - x_0)^2 f''(c) \quad (\text{on pourra commencer par remarquer que } f'(x_0) = 0).$$

b) En déduire que si $f''(x_0) > 0$, g n'est pas dérivable en x_0 .

Exercice n°40

1) Soient f une fonction convexe et dérivable sur un intervalle I et $a, x \in I$.

Montrer que $f(x) \geq f(a) + f'(a)(x - a)$. Quelle interprétation géométrique peut-on donner de cette inégalité ?

2) Soit $x > 0$. On pose $f(x) = \frac{1}{x}$. On rappelle que par définition $\ln(x) = \int_1^x f(t)dt$. En utilisant la convexité de f sur $[1, 2]$, majorer $\ln(2)$ par la surface d'un trapèze. En appliquant le 1) à la fonction f , pour $a = 2$, minorer $\ln(3)$ par la surface d'un trapèze. En déduire que $e \in]2, 3[$. (e est défini par $\ln(e) = 1$)

Exercice n°41

Soit $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 ; on suppose que φ et φ'' sont bornées sur \mathbb{R} et on pose :

$$M_0 = \sup_{x \in \mathbb{R}} |\varphi(x)| \quad \text{et} \quad M_2 = \sup_{x \in \mathbb{R}} |\varphi''(x)|.$$

Montrer que pour tout réel x et tout réel $a > 0$, $|\varphi'(x)| \leq \frac{M_0}{a} + \frac{aM_2}{2}$.

En déduire que φ' est bornée sur \mathbb{R} et que : $M_1 = \sup_{x \in \mathbb{R}} |\varphi'(x)| \leq \sqrt{2M_0M_2}$.

Exercice n°42

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^3 . Pour k dans $\{0, 1, 2, 3\}$, on note $M_k = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f^{(k)}(x)|$. On suppose que M_0 et M_3 sont finis.

1) Soient x un réel et $h > 0$.

a) Ecrire les formules de Taylor-Lagrange à l'ordre 2 au voisinage de x d'une part pour un accroissement $+h$ et d'autre part pour un accroissement $-h$.

b) Résoudre le système linéaire d'inconnues $f'(x)$ et $f''(x)$ ainsi obtenu et en déduire :

$$|f'(x)| \leq \frac{M_0}{h} + h^2 \frac{M_3}{6} \quad \text{et} \quad |f''(x)| \leq \frac{4M_0}{h^2} + h \frac{M_3}{3}.$$

2) Montrer que M_1 et M_2 sont finis.

3) En déduire l'existence de constantes C_1 et C_2 (que l'on déterminera) telles que :

$$M_1 \leq C_1 \sqrt[3]{M_0^2 \cdot M_3} \quad \text{et} \quad M_2 \leq C_2 \sqrt[3]{M_0 \cdot M_3^2}$$

Exercice n°43

On pose $v_n = 2^n \sin \frac{\pi}{2^n}$, pour $n \in \mathbb{N}$.

1) Montrer que $|\pi - v_n| \leq \frac{\pi^3}{6 \times 4^n}$ (on pourra utiliser la formule de Taylor-Lagrange pour sinus en 0).

2) Montrer de même que $|\pi - v_n - \frac{\pi^3}{6 \times 4^n}| \leq \frac{\pi^5}{120 \times 4^{2n}}$.

3) Soit λ un nombre réel. On pose $w_n = \lambda v_{n+1} + (1 - \lambda)v_n$. Déterminer le réel λ pour que l'on ait, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $|\pi - w_n| \leq \frac{K}{4^{2n}}$, où K est une constante, que l'on précisera.

Exercice n°44

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable. On suppose qu'il existe $k \in]0, 1[$ telle que, pour tout $x : |f'(x)| \leq k$. Montrer que f a un unique point fixe (on montrera que $g : x \mapsto f(x) - x$ est une bijection de \mathbb{R} sur \mathbb{R}). Vérifier que $h : x \mapsto 1 + \ln(\text{ch } x)$ vérifie $|h'(x)| < 1$ sur \mathbb{R} mais que h n'a pas de point fixe.

Exercice n°45 (CAPES 2014 - Deuxième composition)

Soient a et b deux nombres réels tels que $a < b$, on désigne par I l'intervalle $[a, b]$. On considère une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ contractante, de coefficient de contraction γ . On suppose que l'intervalle I est stable par f .

- 1) Démontrer que f est continue sur I .
- 2) On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $u_0 \in I$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$.
 - a) Quelle hypothèse permet d'assurer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie?
 - b) Démontrer que : $\forall (n, p) \in \mathbb{N}^2, |u_{n+p} - u_n| \leq \sum_{j=n}^{n+p-1} \gamma^j |u_1 - u_0|$ et en déduire que :

$$\forall (n, p) \in \mathbb{N}^2, |u_{n+p} - u_n| \leq \frac{\gamma^n}{1 - \gamma} |u_1 - u_0|$$

- c) En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente dans I .
- 3) Démontrer que la fonction f admet un point fixe unique dans I .

Exercice n°46

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 + 2}$. On définit une suite récurrente par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour $n \in \mathbb{N}$.

- 1) Établir l'inégalité $|f(x) - f(y)| \leq \frac{3}{4}|x - y|$.
- 2) En déduire la convergence de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Que dire de la limite ℓ ?
- 3) Trouver $N \in \mathbb{N}$ tel que pour $n \geq N$ on ait $|u_n - \ell| \leq 10^{-5}$.

Exercice n°47 (CAPES 2008 - Oral 2)

- 1) On considère la fonction f définie sur $[0, 1]$ par $f(x) = \sqrt{\frac{1+x}{2}}$.
 - a) Résoudre l'équation $f(x) = x$.
 - b) Montrer que pour tout $x \in [0, 1]$, on a $f(x) \geq x$.
- 2) On considère la suite (u_n) définie par la donnée de son premier terme $u_0 \in [0, 1]$ et par la relation $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout entier naturel n . Montrer que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite.

Exercice n°48 (CAPES 2010 - Oral 2)

Soit a un réel. On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = a$ et, pour tout entier n :

$$u_{n+1} = u_n(2 - u_n)$$

- 1) Étudier les cas $a = 0$, $a = 1$ et $a = 2$.

Dans toute la suite, on suppose que $a \in]0; 1[$.

- 2) Étudier les variations de la fonction f définie sur $[0; 1]$ par : $f(x) = x(2 - x)$.
- 3) Montrer que, pour tout entier n , on a : $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$.
- 4) Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite.

Exercice n°49

Etudier les suites récurrentes définies par

- | | |
|--|--|
| 1) $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = 2 - \frac{1}{u_n}$. | 2) $u_0 \in \mathbb{R}$ et $u_{n+1} = -u_n^2 + 2u_n$. |
| 3) $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \frac{2u_n}{1 + u_n^2}$. | 4) $u_0 \in [0, 1]$ et $u_{n+1} = 1 - u_n^2$. |

Exercice n°50 (CAPES 1995)

On définit deux suites (a_n) et (b_n) par $a_0 = a \geq 0$, $b_0 = b \geq 0$ ($b \neq a$), $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n)$ et $b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$.

- 1) Montrer que (b_n) est croissante, (a_n) décroissante, et que pour tout $n \geq 1$ on a $b_n < a_n$.
- 2) Montrer que (a_n) et (b_n) sont deux suites adjacentes.
- 3) Que se passe-t-il si $a = b$?

Exercice n°51

- 1) Soit g la fonction définie sur $[1, +\infty[$ par $g(x) = x - 2 - \ell n x$. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ a une unique solution dans l'intervalle $[3, 4]$. Dans toute la suite, on appelle ℓ cette solution.
- 2) Soit f la fonction définie sur $[1, +\infty[$ par $f(x) = 2 + \ell n x$. Montrer que la donnée $u_0 = 3$ et la relation

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 2 + \ell n (u_n)$$

définissent bien une suite de nombres réels. Montrer que pour tout entier n , $3 \leq u_n \leq 4$.

- 3) Montrer que pour tout entier n , $\frac{|u_0 - \ell|}{4^n} \leq |u_n - \ell| \leq \frac{|u_0 - \ell|}{3^n}$ (on pourra utiliser le théorème des accroissements finis). Quelle est la limite de la suite (u_n) ?

Dans la suite de l'exercice, on applique la méthode de Newton pour la résolution de l'équation $g(x) = 0$, ce qui conduit à considérer la fonction Φ définie pour $x > 1$ par

$$\Phi(x) = \frac{x(1 + \ell n x)}{x - 1}$$

- 4) Montrer que $\Phi(\ell) = \ell$. Calculer $\Phi'(x)$ et montrer que $\Phi'(\ell) = 0$. Etudier les variations de Φ .
- 5) Montrer que la donnée $v_0 = 4$ et la relation $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = \Phi(v_n)$ définissent bien une suite de nombres réels. Montrer que pour tout entier n , $v_n \leq 4$, et que la suite (v_n) converge vers ℓ .
- 6) Calculer $\Phi''(x)$. En écrivant $\Phi''(x)$ sous la forme $\frac{A(x)}{x(x-1)^3}$, à l'aide de majorations très simples, montrer que pour tout x de l'intervalle $[3, 4]$, $|\Phi''(x)| \leq 2$.
- 7) Soit $v > \ell$ un nombre réel. Ecrire la formule de Taylor-Lagrange, à l'ordre 1, pour la fonction Φ entre ℓ et v . En déduire que pour tout entier n , $|v_{n+1} - \ell| \leq |v_n - \ell|^2$.

Exercice n°52

Étudier la nature des séries de terme général :

$$\frac{\ln n}{n^2}, \quad \frac{n}{\ln(e^n - 1)}, \quad \frac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n}, \quad \frac{n^n}{4^n \cdot n!}, \quad \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{n}, \quad e^{-n^2} \ln n.$$

Exercice n°53

Montrer la convergence et calculer la somme des séries :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}, \quad \sum_{n=2}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{(-1)^n}{n} \right), \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}.$$

Exercice n°54

Étudier la convergence et la convergence absolue des séries dont le terme général est :

$$\begin{array}{llll} \text{a) } \frac{(-1)^n}{n^2 + \sin n^2} & \text{b) } (-1)^n \sin \left(\frac{\sqrt{n+1}}{n} \right) & \text{c) } \frac{(-1)^n \sqrt{n} + 1}{n} & \text{d) } e^{\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} - 1 \\ \text{e) } \sqrt{1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} - 1 & \text{f) } (-1)^n \frac{\ln n}{n} & \text{g) } \ln \left(1 + \frac{(-1)^n}{n^\beta} \right) & \text{h) } \frac{\cos \sqrt{n}}{n\sqrt{n}} \\ \text{i) } \frac{(-1)^n}{n^{3/4} + \cos n} & \text{j) } \frac{(-1)^n}{\ln n + \sin(2n\pi/3)} & \text{k) } \frac{(-1)^n \sqrt{n}}{n + (-1)^n \sqrt{n} + 1} & \text{l) } n^{\frac{(-1)^n}{n}} - 1 \end{array}$$

Exercice n°55

Soient $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ et $v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}$. Étudier la nature des séries (u_n) et (v_n) .

Exercice n°56

Soient (u_n) et (v_n) deux séries à termes positifs telles que : $\forall n \geq N, \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}$.

1) Montrer que si $\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ converge.

2) En déduire la convergence de la série de terme général $u_n = \frac{1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times 6 \times \dots \times (2n+2)}$ (on prendra $v_n = n^{-\alpha}$ avec $1 < \alpha < 3/2$ et on utilisera le DL à l'ordre 1 de $\frac{v_{n+1}}{v_n} - \frac{u_{n+1}}{u_n}$).

Exercice n°57

1) Soient (a_n) une suite de réels et (b_n) une suite de complexes. On suppose que :

– la suite (a_n) est décroissante et converge vers 0,

– il existe une constante $K > 0$ telle que pour tous entiers naturels $n \leq m$ on ait $\left| \sum_{p=n}^m b_p \right| \leq K$,

Montrer que la série $\sum a_n b_n$ est convergente.

2) Étudier la nature des séries de terme général : $\frac{\cos n}{n^2}$, $\frac{\cos n}{n}$, $\frac{\cos^2 n}{n}$, $\frac{e^{in\alpha}}{n}$ avec $\alpha \in [0, 2\pi]$.

Exercice n°58 (CAPES 2010 - Première composition)

On pose, pour tout entier naturel n , $r_n = \sum_{k=2^n}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k}$. Montrer que la série de terme général r_n est absolument convergente.

Intégrales

Exercice n°59 (CAPES 2011 - Oral 2)

Soit f la fonction définie sur $[0; 1]$ par $f(x) = x(1 - x^2)$.

On note \mathcal{C} la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormal (O, \vec{i}, \vec{j}) .

On note \mathcal{D} l'ensemble des points $M(x; y)$ tels que : $0 \leq x \leq 1$ et $0 \leq y \leq x(1 - x^2)$.

- 1) Calculer l'aire du domaine \mathcal{D} .
- 2) Existe-t-il une droite (Δ) passant par l'origine et partageant le domaine \mathcal{D} en deux parties de même aire ?

Exercice n°60

Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$. On suppose qu'il existe un réel $k > 0$ tel que $\forall x, y \in [0, 1], |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$. On pose $\alpha_n = \int_0^1 f(t) dt - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f\left(\frac{i}{n}\right)$. Montrer que $|\alpha_n| \leq \frac{k}{2n}$.

Exercice n°61 (CAPES 2013 - Première composition)

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a, b]$, avec $a < b$. Démontrer que :

$$\int_a^b f(x) dx = 0 \implies \forall x \in [a, b], f(x) = 0$$

On pourra procéder par contraposition.

Exercice n°62

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a, b]$ avec $a \leq b$ à valeurs réelles telles que, pour tout $x \in [a, b]$, on ait $f(x)g(x) \geq 1$. Montrer que $\int_a^b f(x) dx \int_a^b g(x) dx \geq (b - a)^2$.

Exercice n°63 (CAPES 2009 - Première composition ; CAPES 2014 - Deuxième composition)

Pour tout entier naturel n , on pose : $W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t dt$.

- 1) Montrer que la suite $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et strictement positive.
- 2) Montrer que pour tout entier naturel n , on a : $(n + 2)W_{n+2} = (n + 1)W_n$.
- 3) En déduire que, pour tout entier $p \geq 0$, on a $W_{2p} = \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2} \frac{\pi}{2}$ et $W_{2p+1} = \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p + 1)!}$.

Exercice n°64 (CAPES 2009 - Oral 2)

On considère la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par : $f(x) = \sqrt{x}e^{1-x}$.

- 1) Donner le tableau de variation de f et tracer l'allure de sa représentation graphique dans un repère orthonormal.

2) On considère la fonction F définie sur $[1, +\infty[$ par $F(x) = \int_1^x f(t) dt$.

a) Démontrer que pour tout réel t positif, on a : $2\sqrt{2}\sqrt{t} \leq t + 2$.

b) En déduire que pour tout réel x appartenant à $[1, +\infty[$ on a : $0 \leq F(x) \leq \frac{1}{2\sqrt{2}} (4 - (x+3)e^{1-x})$.

c) En déduire que pour tout réel x appartenant à $[1, +\infty[$ on a : $0 \leq F(x) \leq \sqrt{2}$.

3) La fonction F admet-elle une limite en $+\infty$?

Exercice n°65

Étudier la convergence et la convergence absolue des intégrales :

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{1+t^2} dt & \text{b) } \int_0^{+\infty} \sin x \sin \frac{1}{x^2} dx & \text{c) } \int_0^1 (\ln t) \left(\sin \frac{1}{t}\right) dt \\ \text{d) } \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \cos t dt & \text{e) } \int_0^{+\infty} te^{-t^2} \left(t^2 \sin t - \cos \frac{1}{t}\right) dt & \text{f) } \int_1^{+\infty} \frac{(\ln t) \cos t}{t^{3/2}} dt \\ \text{g) } \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{t} \cos(t^2)}{e^t - 1} dt & \text{h) } \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} e^{-t} dt & \end{array}$$

Exercice n°66 (CAPES 1993)

Montrer que pour tout $x > 0$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{t \sin t}{x^2 + t^2} dt$ converge (on pourra effectuer une intégration par parties).

Exercice n°67 (d'après CAPES 2010 - Première composition)

Montrer la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t} \left(\frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t}\right) dt$.

Exercice n°68 (CAPES 2010 - Première composition)

Soient a et b deux réels strictement positifs.

1) Soient $x, y \in \mathbb{R}^{+*}$. Montrer que $\int_x^y \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} dt = \int_{ax}^{bx} \frac{e^{-t}}{t} dt - \int_{ay}^{by} \frac{e^{-t}}{t} dt$.

2) Montrer que pour $a \leq b, \forall z > 0, e^{-bz} \ln \frac{b}{a} \leq \int_{az}^{bz} \frac{e^{-t}}{t} dt \leq e^{-az} \ln \frac{b}{a}$.

3) Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} dt = \ln \frac{b}{a}$.

Exercice n°69

Comparer la convergence des intégrales $\int_1^{\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx$ et $\int_1^{\infty} \ln \left(1 + \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\right) dx$.

Exercice n°70 (CAPES 1986)

1) Soit f une fonction continue 2π -périodique. Montrer que pour tout réel a $\int_a^{a+2\pi} f(t) dt = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt$.

2) Montrer que pour toutes fonctions continues 2π -périodiques f et g , la fonction h définie par

$$h(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)g(t)dt$$

est continue et 2π -périodique.

Exercice n°71 (CAPES 2008 - Deuxième composition)

Montrer que la série $\sum \frac{1}{n \ln^2 n}$ est convergente, que la série $\sum \frac{1}{n \ln n}$ est divergente et qu'on a

$$\sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{k \ln k} = \ln \ln n + O(1)$$

(On comparera les séries considérées avec les intégrales généralisées $\int_2^{+\infty} \frac{dt}{t \ln^2 t}$ et $\int_2^{+\infty} \frac{dt}{t \ln t}$)

Suites et séries de fonctions**Exercice n°72**

Étudier la convergence simple et uniforme des suites de fonctions suivantes :

- 1) $f_n : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = \ln \left(x + \frac{1}{n} \right)$, avec $n \in \mathbb{N}^*$.
- 2) $g_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $g_n(x) = \frac{ne^{-x} + x^2}{n + x}$, avec $n \in \mathbb{N}^*$.
- 3) $h_n : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par $h_n(x) = nx^2 e^{-nx}$, avec $n \in \mathbb{N}$.
- 4) $k_n : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par $k_n(x) = \frac{nx}{1 + n^3 x^2}$, avec $n \in \mathbb{N}$.

Exercice n°73

Soit $f_n : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = \frac{n+x}{nx+1}$, avec $n \in \mathbb{N}$.

- 1) Étudier la convergence simple de la suite $(f_n)_n$.
- 2) Trouver les intervalles sur lesquels la convergence est uniforme.
- 3) Étudier la convergence de la suite $(f'_n)_n$.

Exercice n°74

Soit $f_n : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = \frac{x^n}{x^n + 1}$, avec $n \in \mathbb{N}$.

- 1) Étudier la convergence simple de la suite $(f_n)_n$.
- 2) Trouver les intervalles sur lesquels la convergence est uniforme.
- 3) Montrer que $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^2 f_n(t) dt = 1$.

Exercice n°75

Montrer que la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} (-1)^n \frac{n+x^2}{n^2}$ ne converge absolument en aucun x réel mais que cette série converge uniformément sur tout compact de \mathbb{R} .

Exercice n°76

Étudier la convergence simple, uniforme et normale des séries de fonctions suivantes :

- 1) $f_n : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = \frac{nx^2}{n^3 + x^2}$.
- 2) $g_n : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par $g_n(x) = \frac{n+x}{n^3 + x^2}$.

3) $h_n : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par $h_n(x) = \frac{1}{1+x^n}$.

Exercice n°77

Soit $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = \frac{x}{(x^2+1)^n}$, avec $n \in \mathbb{N}^*$.

- 1) Montrer que les sommes partielles de la série de terme général f_n sont bornées et continues sur \mathbb{R} .
- 2) Calculer la somme S de la série.
- 3) Montrer que S n'est ni continue, ni bornée sur \mathbb{R} . Que peut-on en déduire?

Exercice n°78

Soit $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = (-1)^{n+1} \frac{e^{-nx}}{n}$, avec $n \in \mathbb{N}^*$.

- 1) Étudier la convergence simple, normale et uniforme de la série de fonctions de terme général f_n .
- 2) Montrer que la somme f de la série de fonctions est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$.
- 3) Calculer f .

Exercice n°79

Soit $\zeta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$. On définit ainsi la fonction Zeta de Riemann.

- 1) Quel est le domaine de définition de la fonction ζ ?
- 2) Montrer que ζ est strictement décroissante et convexe. En déduire que $\lim_{x \rightarrow 1^+} \zeta(x) = +\infty$.
- 3) Montrer que pour tout $x \geq 2$ et tout $N \geq 1$ on a : $1 \leq \zeta(x) \leq \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^x} + \sum_{n \geq N+1} \frac{1}{n^2}$.
En déduire que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \zeta(x) = 1$.
- 4) Montrer que ζ est de classe C^∞ et que $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $\forall x > 1$, $\zeta^{(p)}(x) = \sum_{n \geq 2} \frac{(-\ln n)^p}{n^x}$.

Retrouver ainsi le résultat de la question 2).

- 5) Pour $n \geq 2$ et $x > 0$, montrer les inégalités $\int_n^{n+1} t^{-x} dt \leq n^{-x} \leq \int_{n-1}^n t^{-x} dt$.
- 6) En déduire que pour $x > 1$ et $N \geq 2$ on a : $\frac{N^{1-x}}{x-1} \leq \sum_{n \geq N} \frac{1}{n^x} \leq \frac{(N-1)^{1-x}}{x-1}$.
- 7) Montrer que $\zeta(x) - 1 \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} 2^{-x}$ et que $\zeta(x) \underset{x \rightarrow 1}{\sim} \frac{1}{x-1}$.

Exercice n°80 (CAPES 1997)

Pour tout entier $k \geq 1$, on pose $f_k : x > 0 \mapsto \frac{1}{k^{x+1}}$.

- 1) Montrer que pour tout entier $r \geq 1$, la série de fonctions $[f_k^{(r)}]$ converge normalement sur tout intervalle $[\alpha, +\infty[$ ($\alpha > 0$).
- 2) En déduire que la fonction $S : x > 0 \mapsto \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^{x+1}}$ est de classe C^∞ .
- 3) Montrer que S est décroissante et convexe.

Exercice n°81

La limite supérieure d'une suite de nombres réels $(a_n)_n$ est définie par $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{p \rightarrow \infty} (\sup_{n \geq p} a_n)$.

- 1) Soit $(b_n)_n$ une suite de réels positifs. Montrer que si la limite supérieure de $(b_n^{1/n})_n$ est strictement inférieure à 1, alors la série numérique $\sum_n b_n$ converge, alors que si elle est strictement supérieure à 1, la série $\sum_n b_n$ diverge.
- 2) En déduire que le rayon de convergence R de la série entière $\sum_n a_n z^n$ satisfait $\frac{1}{R} = \limsup_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{1/n}$.
- 3) Donner le rayon de convergence des séries entières $\sum_n n! z^n$, $\sum_n \frac{1}{n!} z^n$, $\sum_n z^n$, $\sum_n \frac{1}{n} z^n$.
- 4) Montrer que les séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum n a_n z^n$ ont même rayon de convergence.

Exercice n°82

Trouver le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$ lorsque :

$a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \ell \neq 0$	(a_n) est périodique non nulle	$a_n = \sum_{d n} d^2$
$a_n = \frac{n^n}{n!}$	$a_{2n} = a^n$ et $a_{2n+1} = b^n$ ($0 < a < b$)	$a_n = e^{\sqrt{n}}$
$a_n = \frac{1.4.7 \dots (3n-2)}{n!}$	$a_n = \frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{n}}$	$a_n = \arccos\left(\frac{n-1}{n}\right)$
$a_n = \frac{\cos n\theta}{\sqrt{n} + (-1)^n}$	a_n est le nombre de diviseurs de n	

Exercice n°83

On définit la fonction cosinus sur \mathbb{R} par $\cos x = \operatorname{Re}(e^{ix})$.

- 1) Montrer que $\cos x + 1 = 2 \cos^2(\frac{x}{2})$ pour $x \in \mathbb{R}$.
- 2) Montrer que $\cos 2 \leq 0$.
- 3) Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $\cos \alpha = 0$ et tel que pour $0 \leq x < \alpha$, on ait $\cos x > 0$.
- 4) Montrer que $\cos : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$ est surjective.

Exercice n°84 (d'après CAPES 1996)

Montrer que l'équation différentielle $-t^2 y''(t) - 2ty'(t) + y(t) = \operatorname{Arctan} t$ admet une solution développable en série entière au voisinage de 0.

Exercice n°85 (d'après CAPES 1986)

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(t) = |\sin \frac{t}{2}|$.

Montrer que f est développable en série de Fourier. et calculer ses coefficients de Fourier trigonométriques.

Exercice n°86 (CAPES 1997)

Pour $x \neq 0$ fixé, on considère la fonction f 2π -périodique définie sur $] -\pi, \pi]$ par $f(t) = \operatorname{ch} xt$.

- 1) Montrer que f est paire, continue et de classe C^1 par morceaux sur \mathbb{R} .
- 2) Calculer les coefficients de Fourier trigonométriques de f .
- 3) Montrer que f est somme de sa série de Fourier et en déduire que $\pi \operatorname{coth}(\pi x) - \frac{1}{x} = \sum_{n \geq 1} \frac{2x}{x^2 + n^2}$.