Feuille d'exercices d'analyse

Suites numériques

Exercice n°1

Étudier la nature des suites (u_n) définies par :

a) $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ **b)** $u_n = \dfrac{n+(-1)^n}{n+\ln n}$ **c)** $u_n = \dfrac{a^n - b^n}{a^n + b^n}$ pour $a > 0$ et $b > 0$

d) $u_n = \dfrac{n^2 + \cos n}{2^n + \sin n}$ **e)** $u_n = \displaystyle\prod_{p=2}^{n}(1 - \frac{1}{p})$

Exercice n°2 *(CAPES 2009 - Oral 2)*

On considère une suite numérique (u_n) positive et la suite (v_n) définie par $v_n = \dfrac{u_n}{1+u_n}$. Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier dans chaque cas.

1) La suite (v_n) est bornée.

2) Si la suite (u_n) est croissante, alors la suite (v_n) est croissante.

3) Si la suite (u_n) est convergente, alors la suite (v_n) est convergente.

4) Si la suite (v_n) est convergente, alors la suite (u_n) est convergente.

Exercice n°3

Étudier la nature des suites (u_n) définies par :

a) $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k}$ **b)** $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{\sqrt{n^2+k}}$ **c)** $u_n = \displaystyle\frac{1}{n!}\sum_{k=1}^{n} k!$

d) $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$ **e)** $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}$ **f)** $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$

Exercice n°4 *(CAPES 2012 - Première composition)*

On considère la suite $(H_n)_{n\geqslant 1}$ définie par $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

Montrer que pour tout entier $k \geqslant 1$, $\dfrac{1}{k+1} \leqslant \displaystyle\int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leqslant \frac{1}{k}$. En déduire que $H_n \underset{n\to\infty}{\sim} \ell n\, n$.

Exercice n°5 *(d'après CAPES 2014 - Oral 2)*

1) Un magazine est vendu uniquement par abonnement. Le modèle économique prévoit qu'il y ait 1 800 nouveaux abonnés chaque année et que d'une année sur l'autre, 15 % des abonnés ne se réabonnent pas. En 2013, il y avait 8 000 abonnés.
Pour tout entier naturel n, on note u_n le nombre de milliers d'abonnés prévus en $(2013 + n)$. Expliciter une relation entre u_{n+1} et u_n puis donner l'expression de u_n en fonction de n.

2) Étudier la nature des suites (u_n) définies par :

a) $u_{n+1} = -2u_n + 1$ **b)** $u_{n+1} = \dfrac{2}{3}u_n - 2$ **c)** $u_{n+1} = iu_n + 1 - i$

Exercice n°6 *(CAPES 2007 - Oral 2)*

Soit (x_n) la suite définie par $\begin{cases} x_{n+1} & = \frac{1}{2}x_n + \frac{1}{2^n} \\ x_0 & = 1 \end{cases}$

1) Déterminer x_1, x_2, x_3 et x_4, en laissant les résultats sous forme fractionnaire.

2) Montrer que la suite (x_n) est décroissante à partir du rang $n = 1$.

3) Montrer que la suite (x_n) est convergente et déterminer sa limite.

4) Conjecturer l'expression générale de x_n en fonction de n et démontrer cette égalité.

Exercice n°7 *(CAPES 2013 - Oral 2)*

Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 3u_n - 2n + 3$.

1) Montrer que pour pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant n$.

2) En déduire les variations et la limite de la suite (u_n).

3) Construire un algorithme qui prend en entrée un réel A strictement positif et renvoie le plus petit entier n tel que $u_n > A$.

Exercice n°8

Les suites (u_n) et (v_n) convergent-elles ?

a) $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k+1}\frac{1}{k}$ et $v_n = u_n + \dfrac{1}{2n+1}$ **b)** $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3}$ et $v_n = u_n + \dfrac{1}{n^2}$

Exercice n°9

On définit la suite (u_n) par $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}}$. Montrer que les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont adjacentes. Conclusion ?

Exercice n°10 *(CAPES 2015 - Première composition)*

On considère la suite définie pour tout entier naturel $n \geqslant 1$ par $a_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

Démontrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, $a_{2n} - a_n \geqslant \dfrac{1}{2}$. La suite $(a_n)_{n\geqslant 1}$ est-elle convergente ?

Exercice n°11 *(CAPES 2013 - Première composition)*

On rappelle que $e = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}$. On se propose de démontrer que le nombre e est un nombre irrationnel. Pour cela, on fait l'hypothèse qu'il existe p et q, entiers naturels non nuls, tels que $e = \dfrac{p}{q}$ et on démontre que cette hypothèse conduit à une contradiction.

Pour tout entier naturel n non nul, on pose : $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ et $v_n = u_n + \dfrac{1}{n \times n!}$. Démontrer que les suites $(u_n)_{\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes, puis montrer que : $u_q < e < v_q$.

Aboutir à une contradiction en multipliant les termes de cet encadrement par $q! \times q$.

Exercice n°12 *(CAPES 2010 - Première composition)*

1) Soit $p \in \mathbb{N}$. Montrer que la suite $\left(\dfrac{1}{2^n}\dbinom{n}{p}\right)_{n \geqslant p}$ converge vers 0.

2) Soit $(u_p)_{p\in\mathbb{N}}$ une suite réelle convergeant vers 0. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n}\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p} u_p = 0$. (On pourra, un réel $\varepsilon > 0$ étant donné, choisir un entier k suffisamment grand pour que $\left|\dfrac{1}{2^n}\displaystyle\sum_{p=k+1}^{n}\binom{n}{p} u_p\right| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.)

Exercice n°13 *(CAPES 2015 - Première composition)*

À toute suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$, on associe la suite $(v_n)_{n\geqslant 1}$ définie par $\forall n \geqslant 1,\ v_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k$. On dit que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge au sens de CESÀRO si la suite $(v_n)_{n\geqslant 1}$ converge.

1) Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de limite nulle et $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$.

a) Montrer qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que, pour tout $n \geqslant n_0$, $\dfrac{1}{n}\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n_0} u_k\right) - \varepsilon \leqslant v_n \leqslant \dfrac{1}{n}\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n_0} u_k\right) + \varepsilon$.

b) En déduire que la suite $(v_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers 0.

2) Énoncer et démontrer la généralisation du résultat précédent au cas où la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers un réel ℓ quelconque.

3) La réciproque de ce dernier résultat est-elle exacte ?

Fonctions - Fonctions continues

Exercice n°14

Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{x^3\sin^3 x - x^2\cos^2 x + x\sin x - 3}{x^2\cos x + 20}$ pour $x \in [-1, 4]$. Trouver deux nombres réels a, b tels que $a \leqslant f(x) \leqslant b$ pour tout x de l'intervalle $[-1, 4]$.

Exercice n°15

Soit $f : x \longmapsto \cos x + x^4$ et $x_0 = \ell n\, 5$ (donc $1 < x_0 < 2$). On veut calculer $f(x_0)$ avec une précision de 10^{-2}.

a) Trouver un réel $\eta_1 > 0$ tel que pour tout x vérifiant $|x - x_0| < \eta_1$, on ait $|\cos x - \cos x_0| < 0,005$. On pourra utiliser la factorisation de $\cos p - \cos q$ et la majoration $|\sin x| \leqslant |x|$.

b) Trouver un réel $\eta_2 > 0$ tel que pour tout x vérifiant $|x - x_0| < \eta_2$, on ait $|x^4 - x_0^4| < 0,005$.

c) En déduire un réel $\eta > 0$ tel que pour tout x vérifiant $|x - x_0| < \eta$, on ait $|f(x) - f(x_0)| < 10^{-2}$.

Exercice n°16

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$, admettant une période strictement positive t. Montrer que si f a une limite en $+\infty$, alors f est constante.

Exercice n°17

Soit k un réel strictement positif et différent de 1. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ telle que, pour tout réel x, $f(kx) = f(x)$. Montrer que si f est continue à l'origine, elle est constante.

Exercice n°18

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On note $E = \{x \in [a, b] | f(x) = 0\}$. Montrer que si E n'est pas vide, alors $\sup E$ est un élément de E.

Exercice n°19

1) *(CAPES 2011 - Première composition ; CAPES 2014 - Deuxième composition)*
Soient a et b deux réels tels que $a < b$ et soit f une fonction continue sur $[a, b]$, à valeurs dans $[a, b]$.

a) Montrer que f a au moins un point fixe : il existe c dans $[a, b]$ tel que $f(c) = c$.

b) Peut-on assurer l'unicité du point fixe si on suppose f en outre strictement décroissante (respectivement strictement croissante) ?

2) Soit $f : [0, 2] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue et telle que $f(0) = f(2)$. Montrer que l'équation $f(x) = f(x + 1)$ a au moins une solution.

Exercice n°20 *(CAPES 2011 - Oral 2 (sujet zéro))*

Un marcheur a parcouru 10 km en une heure. Existe-t-il un intervalle d'une demi-heure pendant lequel il a parcouru exactement 5 km ? Voici comment on se propose de résoudre ce problème :
Pour t appartenant à l'intervalle $[0, 1]$, on désigne par $f(t)$ la distance, en kilomètres, parcourue à l'instant t, en heures. Il est naturel de faire l'hypothèse que f est une fonction continue sur $[0, 1]$.

1) Préciser $f(0)$ et $f(1)$. Écrire l'équation traduisant le problème.

2) Soit g la fonction définie sur l'intervalle $[0, 1]$ par $g(t) = f(t + \frac{1}{2}) - f(t)$. Démontrer que l'équation $g(t) = 5$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[0, \frac{1}{2}]$. Conclure.

Exercice n°21

Soit $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ continue. On suppose que f admet la même limite finie ℓ en a et b. Montrer que f n'est pas injective sur $]a, b[$.

Exercice n°22 *(d'après CAPES 1993)*

Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ continue et ayant une limite finie ℓ en $+\infty$. Montrer que f est bornée sur $[0, +\infty[$ et atteint au moins une de ses bornes.

Exercice n°23

Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ continue telle que pour tout $x > 0$, $|f(x)| < x$. Calculer $f(0)$. Montrer qu'à tout couple (a, b) de réels vérifiant $0 < a < b$, on peut associer un nombre k de $]0, 1[$ tel que, pour tout x de $]a, b[$, $|f(x)| \leqslant kx$. Est-ce vrai pour les couples $(0, b)$?

Exercice n°24 *(CAPES 2012 - Première composition)*

1) Montrer que pour tous réels x et y on a $||y| - |x|| \leqslant |y - x|$. En déduire que $f : x \longmapsto \dfrac{1}{1 + |x|}$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

2) Montrer que pour tous réels positifs x et y on a $\sqrt{x + y} \leqslant \sqrt{x} + \sqrt{y}$ et $|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leqslant \sqrt{|x - y|}$. En déduire que $g : x \longmapsto \sqrt{x}$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice n°25 *(CAPES 2014ex - Première composition)*

Soient a et b deux réels tels que $a < b$ et f une fonction continue sur $[a, b]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, on pose : $x_k = a + k\dfrac{b - a}{n}$.

1) Démontrer que : $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall (x,y) \in [a,b]^2,\ |x-y| \leqslant \eta \Longrightarrow |f(x)-f(y)| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{b-a}$.

2) Soit ε un réel strictement positif. Démontrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \geqslant N,\ \forall k \in [\![0, n-1]\!],\ \forall t \in [x_k, x_{k+1}],\ |f(t) - f(x_k)| \leqslant \frac{\varepsilon}{b-a}$$

Exercice n°26 *(CAPES 2012 - Première composition)*

Soit $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ uniformément continue.

On se propose de montrer qu'il existe deux réels a et b tels que, pour tout $x \in \mathbb{R}^+$: $f(x) \leqslant ax + b$.

1) Justifier l'existence d'un réel η_1 strictement positif tel que :

$$\exists \eta_1 > 0,\ \forall (x,y) \in \left(\mathbb{R}^+\right)^2,\ (|x-y| \leqslant \eta_1 \Longrightarrow |f(x)-f(y)| \leqslant 1)$$

Soit $x_0 \in \mathbb{R}^+$.

2) Soit n_0 le plus petit entier tel que $\dfrac{x_0}{n_0} \leqslant \eta_1$; justifier l'existence de n_0 et exprimer n_0 en fonction de x_0 et de η_1.

3) Montrer que $|f(x_0) - f(0)| \leqslant \displaystyle\sum_{k=0}^{n_0-1} \left| f\left(\frac{(k+1)x_0}{n_0}\right) - f\left(\frac{kx_0}{n_0}\right) \right|$

4) Conclure.

Exercice n°27

1) a) Montrer que les fonctions $f : x \longmapsto e^{-x}$ et $g : x \longmapsto |x|$ sont convexes sur $\mathbb{R}$.

b) Soit $h : x \longmapsto e^{-|x|}$. Vérifier que $h(0) > \frac{1}{2}(h(1) + h(-1))$. h est-elle convexe sur $\mathbb{R}$?

2) Soient $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ convexes. On pose $h = f \circ g$.

a) Peut-on affirmer que h est convexe sur $\mathbb{R}$?

b) On suppose en outre f croissante sur $\mathbb{R}$. Montrer que h est convexe sur $\mathbb{R}$.

Exercice n°28 *(CAPES 2013 - Première composition)*

On considère une fonction f convexe sur un intervalle I, $(x_1, ..., x_n) \in I^n$, $(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in \mathbb{R}_+^n$, avec $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1$.

Démontrer que : $f\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\right) \leqslant \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(x_k)$. *On pourra procéder par récurrence sur n en remarquant que si $\lambda_n \neq 1$:* $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k = \lambda_n x_n + (1-\lambda_n)\left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{\lambda_k}{1-\lambda_n} x_k\right)$

Exercice n°29

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe et bornée.

1) Soit a un réel quelconque. On pose $g_a : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$.

a) Montrer que g_a est croissante sur $]a, +\infty[$ (on pourra, pour $a < x < y$, écrire x sous la forme $x = ta + (1-t)y$, pour un t convenablement choisi).

Montrer que $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} g_a(x) = 0$.

b) En déduire que f est décroissante sur $\mathbb{R}$.

2) Montrer que $\hat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(-x)$ est aussi convexe et bornée. Qu'en déduit-on pour f ?

3) Enoncer un résultat résumant cet exercice.

Fonctions dérivables - Formules de Taylor

Exercice n°30

Pour tout réel λ, $-\mathbf{1} \leqslant \lambda \leqslant \mathbf{1}$, on considère la fonction f_λ donnée par $f_\lambda(x) = \ell n\,(x^2 - 2\lambda x + 1)$. Soit C_λ la courbe représentative de f_λ dans un repère orthonormal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1) Déterminer suivant les valeurs de λ l'ensemble de définition de f_λ et montrer que la droite d'équation $x = \lambda$ est un axe de symétrie pour C_λ.
Par quelle transformation géométrique simple peut-on déduire $C_{-\lambda}$ de C_λ ?

2) Etudier, en discutant suivant les valeurs de λ, la fonction f_λ. On précisera les variations, les limites aux bornes de l'ensemble d'étude et les branches infinies éventuelles.

3) Soit M_0 un point du plan de coordonnées (x_0, y_0). Combien de courbes C_λ passent par M_0 ?

Exercice n°31

Soit $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ une fonction continue qui ne s'annule pas sur $]a, b[$. Montrer que si la fonction carrée f^2 est dérivable, il en est de même de f.

Exercice n°32 *(CAPES 2011 - Première composition)*

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I d'intérieur non vide et soit $(a, b) \in I^2$ avec $a < b$. On suppose $f'(a) < f'(b)$ et on considère $\lambda \in]f'(a), f'(b)[$. Soit g la fonction définie sur I par $g(x) = f(x) - \lambda x$.

1) Justifier l'existence d'un $c \in [a, b]$ tel que $g(c) = \inf_{x \in [a,b]} g(x)$. et montrer que $c \notin \{a, b\}$.

2) En déduire que f' vérifie la propriété des valeurs intermédiaires.

3) Donner alors un exemple de fonction définie sur $\mathbb{R}$ ne possédant pas de primitive sur $\mathbb{R}$.

Exercice n°33

1) Soit $\alpha > 0$. A l'aide du théorème des accroissements finis appliqué à $x \mapsto \dfrac{1}{x^\alpha}$, montrer que pour tout n de $\mathbb{N} - \{0, 1\}$, $\quad \dfrac{1}{n^{1+\alpha}} < \dfrac{1}{\alpha}\left(\dfrac{1}{(n-1)^\alpha} - \dfrac{1}{n^\alpha}\right)$.

2) En déduire que la suite donnée par $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}$ converge pour $\alpha > 1$.

Exercice n°34

On définit la fonction f de la variable réelle x par $f(x) = x + 2x^2 \sin \dfrac{1}{x}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.

1) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

2) A l'aide de la définition de la dérivée, montrer que f est dérivable en 0 et que $f'(0) = 1$.

3) Peut-on en déduire que f est croissante près de 0 ?

4) Montrer que sur tout intervalle $[-\alpha, \alpha]$ il existe des points où f' vaut 1 et des points où f' vaut -1.

5) Qu'en déduit-on du point de vue de la monotonie de f au voisinage de 0 ?

$\boxed{\textbf{Exercice n°35}}$

Soit $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ de classe C^2 telle que $f(-1) = f(1) = 0$.
Montrer que, pour tout α de $]-1, 1[$, il existe un polynôme P de degré $\leqslant 2$ tel que la fonction $g = f + P$ s'annule en -1, 1 et α. En déduire que $f(\alpha) = \frac{\alpha^2-1}{2} f''(c)$ où $c \in]-1, 1[$, puis que :

$$\sup_{x\in[-1,1]} |f(x)| \leqslant \frac{1}{2} \sup_{x\in[-1,1]} |f''(x)|$$

$\boxed{\textbf{Exercice n°36}}$

Soit f une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}$, de classe C^2 sur $\mathbb{R}$. On suppose que $f(0) = f'(0) = 0$. On pose $g(x) = \begin{cases} f(\sqrt{x}) & \text{si } x \geqslant 0 \\ f(-\sqrt{-x}) & \text{si } x < 0 \end{cases}$

1) Vérifier que g est de classe C^1 sur chacun des intervalles $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$.

2) Vérifier que g est continue sur $\mathbb{R}$.

3) Calculer $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} g'(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x<0}} g'(x)$.

4) Donner une condition nécessaire et suffisante, portant sur $f''(0)$, pour que g soit de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

$\boxed{\textbf{Exercice n°37}}$ *(CAPES 2000)*

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $L_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t \mapsto \dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}(t^2 - 1)^n$. Montrer que $L_n(1) = 2^n n!$ et calculer $L_n(-1)$.

$\boxed{\textbf{Exercice n°38}}$ *(d'après CAPES 2002)*

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation $f(x) = xf'(\frac{x}{2})$.

1) Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

2) On suppose en outre f de classe C^n ($n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$). En utilisant la formule de Taylor-Young, montrer que, pour tout entier p compris entre 1 et n, on a : $f^{(p)}(0) = 0$ ou $p2^{1-p} = 1$.

$\boxed{\textbf{Exercice n°39}}$ *(CAPES 1991)*

Soit f une fonction positive, de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et telle que f'' soit bornée sur $\mathbb{R}$.

1) On note $M = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |f''(x)|$.

a) Montrer, en appliquant la formule de Taylor avec reste de Lagrange à la fonction f que, pour tout couple de réels (x, λ) on a : $f(x) + \lambda f'(x) + \dfrac{\lambda^2}{2} M \geqslant 0$.

b) En déduire que pour tout réel x on a : $|f'(x)| \leqslant \sqrt{2M.f(x)}$.

2) Soit x_0 un réel tel que $f(x_0) = 0$. On pose $g = \sqrt{f}$.

a) Montrer que pour tout réel x, $x \neq x_0$, il existe un réel c compris entre x_0 et x tel que :
$f(x) = \frac{1}{2}(x - x_0)^2 f''(c)$ (on pourra commencer par remarquer que $f'(x_0) = 0$).

b) En déduire que si $f''(x_0) > 0$, g n'est pas dérivable en x_0.

$\boxed{\textbf{Exercice n°40}}$

1) Soient f une fonction convexe et dérivable sur un intervalle I et $a, x \in I$.
Montrer que $f(x) \geqslant f(a) + f'(a)(x-a)$. Quelle interprétation géométrique peut-on donner de cette inégalité ?

2) Soit $x > 0$. On pose $f(x) = \dfrac{1}{x}$. On rappelle que par définition $\ell n\,(x) = \displaystyle\int_1^x f(t)dt$. En utilisant la convexité de f sur $[1,2]$, majorer $\ell n\,(2)$ par la surface d'un trapèze. En appliquant le 1) à la fonction f, pour $a = 2$, minorer $\ell n\,(3)$ par la surface d'un trapèze. En déduire que $e \in]2,3[$. (e est défini par $\ell n\,(e) = 1$)

$\boxed{\textbf{Exercice n°41}}$

Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2 ; on suppose que φ et φ" sont bornées sur $\mathbb{R}$ et on pose :

$$M_0 = \sup_{x\in\mathbb{R}} |\varphi(x)| \quad \text{et} \quad M_2 = \sup_{x\in\mathbb{R}} |\varphi"(x)|.$$

Montrer que pour tout réel x et tout réel $a > 0$, $|\varphi'(x)| \leqslant \dfrac{M_0}{a} + \dfrac{aM_2}{2}$.
En déduire que φ' est bornée sur $\mathbb{R}$ et que : $M_1 = \displaystyle\sup_{x\in\mathbb{R}} |\varphi'(x)| \leqslant \sqrt{2M_0M_2}$.

$\boxed{\textbf{Exercice n°42}}$

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^3. Pour k dans $\{0,1,2,3\}$, on note $M_k = \displaystyle\sup_{x\in\mathbb{R}} \left|f^{(k)}(x)\right|$. On suppose que M_0 et M_3 sont finis.

1) Soient x un réel et $h > 0$.

a) Ecrire les formules de Taylor-Lagrange à l'ordre 2 au voisinage de x d'une part pour un accroissement $+h$ et d'autre part pour un accroissement $-h$.

b) Résoudre le système linéaire d'inconnues $f'(x)$ et $f''(x)$ ainsi obtenu et en déduire :

$$|f'(x)| \leqslant \frac{M_0}{h} + h^2\frac{M_3}{6} \qquad \text{et} \qquad |f''(x)| \leqslant \frac{4M_0}{h^2} + h\frac{M_3}{3}.$$

2) Montrer que M_1 et M_2 sont finis.

3) En déduire l'existence de constantes C_1 et C_2 (que l'on déterminera) telles que :

$$M_1 \leqslant C_1\sqrt[3]{M_0^2.M_3} \qquad \text{et} \qquad M_2 \leqslant C_2\sqrt[3]{M_0.M_3^2}$$

$\boxed{\textbf{Exercice n°43}}$

On pose $v_n = 2^n \sin\dfrac{\pi}{2^n}$, pour $n \in \mathbb{N}$.

1) Montrer que $|\pi - v_n| \leqslant \dfrac{\pi^3}{6 \times 4^n}$ (on pourra utiliser la formule de Taylor-Lagrange pour sinus en 0).

2) Montrer de même que $|\pi - v_n - \dfrac{\pi^3}{6\times 4^n}| \leqslant \dfrac{\pi^5}{120 \times 4^{2n}}$.

3) Soit λ un nombre réel. On pose $w_n = \lambda v_{n+1} + (1-\lambda)v_n$. Déterminer le réel λ pour que l'on ait, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $|\pi - w_n| \leqslant \dfrac{K}{4^{2n}}$, où K est une constante, que l'on précisera.

Théorème du point fixe - Suites récurrentes

Exercice n°44

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable. On suppose qu'il existe $k \in]0,1[$ telle que, pour tout x : $|f'(x)| \leqslant k$. Montrer que f a un unique point fixe (on montrera que $g : x \mapsto f(x) - x$ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$). Vérifier que $h : x \mapsto 1 + \ell n\,(\mathrm{ch}\ x)$ vérifie $|h'(x)| < 1$ sur $\mathbb{R}$ mais que h n'a pas de point fixe.

Exercice n°45 *(CAPES 2014 - Deuxième composition)*

Soient a et b deux nombres réels tels que $a < b$, on désigne par I l'intervalle $[a, b]$. On considère une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ contractante, de coefficient de contraction γ. On suppose que l'intervalle I est stable par f.

1) Démontrer que f est continue sur I.

2) On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 \in I$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

a) Quelle hypothèse permet d'assurer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie ?

b) Démontrer que : $\quad \forall (n,p) \in \mathbb{N}^2,\ |u_{n+p} - u_n| \leqslant \displaystyle\sum_{j=n}^{n+p-1} \gamma^j\,|u_1 - u_0|$ $\quad$ et en déduire que :

$$\forall (n,p) \in \mathbb{N}^2,\ |u_{n+p} - u_n| \leqslant \frac{\gamma^n}{1-\gamma}\,|u_1 - u_0|$$

c) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente dans I.

3) Démontrer que la fonction f admet un point fixe unique dans I.

Exercice n°46

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2+2}$. On définie une suite récurrente par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour $n \in \mathbb{N}$.

1) Établir l'inégalité $|f(x) - f(y)| \leqslant \dfrac{3}{4}|x - y|$.

2) En déduire la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Que dire de la limite ℓ ?

3) Trouver $N \in \mathbb{N}$ tel que pour $n \geqslant N$ on ait $|u_n - l| \leqslant 10^{-5}$.

Exercice n°47 *(CAPES 2008 - Oral 2)*

1) On considère la fonction f définie sur $[0,1]$ par $f(x) = \sqrt{\dfrac{1+x}{2}}$.

a) Résoudre l'équation $f(x) = x$.

b) Montrer que pour tout $x \in [0,1]$, on a $f(x) \geqslant x$.

2) On considère la suite (u_n) définie par la donnée de son premier terme $u_0 \in [0,1]$ et par la relation $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout entier naturel n. Montrer que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite.

Exercice n°48 *(CAPES 2010 - Oral 2)*

Soit a un réel. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = a$ et, pour tout entier n :

$$u_{n+1} = u_n(2 - u_n)$$

1) Étudier les cas $a = 0$, $a = 1$ et $a = 2$.

Dans toute la suite, on suppose que $a \in]0;1[$.

2) Étudier les variations de la fonction f définie sur $[0;1]$ par : $f(x) = x(2-x)$.

3) Montrer que, pour tout entier n, on a : $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$.

4) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite.

Exercice n°49

Etudier les suites récurrentes définies par

1) $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = 2 - \dfrac{1}{u_n}$.

2) $u_0 \in \mathbb{R}$ et $u_{n+1} = -u_n^2 + 2u_n$.

3) $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \dfrac{2}{1+u_n^2}$.

4) $u_0 \in [0,1]$ et $u_{n+1} = 1 - u_n^2$.

Exercice n°50 *(CAPES 1995)*

On définit deux suites (a_n) et (b_n) par $a_0 = a \geqslant 0$, $b_0 = b \geqslant 0$ $(b \neq a)$, $a_{n+1} = \dfrac{1}{2}(a_n + b_n)$ et $b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$.

1) Montrer que (b_n) est croissante, (a_n) décroissante, et que pour tout $n \geqslant 1$ on a $b_n < a_n$.

2) Montrer que (a_n) et (b_n) sont deux suites adjacentes.

3) Que se passe-t-il si $a = b$?

Exercice n°51

1) Soit g la fonction définie sur $[1, +\infty[$ par $g(x) = x - 2 - \ell n\, x$. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ a une unique solution dans l'intervalle $[3,4]$. Dans toute la suite, on appelle ℓ cette solution.

2) Soit f la fonction définie sur $[1, +\infty[$ par $f(x) = 2 + \ell n\, x$. Montrer que la donnée $u_0 = 3$ et la relation

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 2 + \ell n\,(u_n)$$

définissent bien une suite de nombres réels. Montrer que pour tout entier n, $3 \leqslant u_n \leqslant 4$.

3) Montrer que pour tout entier n, $\dfrac{|u_0 - \ell|}{4^n} \leqslant |u_n - \ell| \leqslant \dfrac{|u_0 - \ell|}{3^n}$ (on pourra utiliser le théorème des accroissements finis). Quelle est la limite de la suite (u_n) ?
Dans la suite de l'exercice, on applique la méthode de Newton pour la résolution de l'équation $g(x) = 0$, ce qui conduit à considérer la fonction Φ définie pour $x > 1$ par

$$\Phi(x) = \frac{x(1 + \ell n\, x)}{x - 1}$$

4) Montrer que $\Phi(\ell) = \ell$. Calculer $\Phi'(x)$ et montrer que $\Phi'(\ell) = 0$. Etudier les variations de Φ.

5) Montrer que la donnée $v_0 = 4$ et la relation $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = \Phi(v_n)$ définissent bien une suite de nombres réels. Montrer que pour tout entier n, $v_n \leqslant 4$, et que la suite (v_n) converge vers ℓ.

6) Calculer $\Phi''(x)$. En écrivant $\Phi''(x)$ sous la forme $\dfrac{A(x)}{x(x-1)^3}$, à l'aide de majorations très simples, montrer que pour tout x de l'intervalle $[3,4]$, $|\Phi''(x)| \leqslant 2$.

7) Soit $v > \ell$ un nombre réel. Ecrire la formule de Taylor-Lagrange, à l'ordre 1, pour la fonction Φ entre ℓ et v. En déduire que pour tout entier n, $|v_{n+1} - \ell| \leqslant |v_n - \ell|^2$.

Exercice n°52

Etudier la nature des séries de terme général :

$$\frac{\ell n\, n}{n^2},\quad \frac{n}{\ell n\,(e^n-1)},\quad \frac{n^{\ell n\, n}}{(\ell n\, n)^n},\quad \frac{n^n}{4^n.n!},\quad \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n},\quad e^{-n^2}\ell n\, n.$$

Exercice n°53

Montrer la convergence et calculer la somme des séries :

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)},\qquad \sum_{n=2}^{\infty}\ell n\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right),\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}.$$

Exercice n°54

Étudier la convergence et la convergence absolue des séries dont le terme général est :

a) $\dfrac{(-1)^n}{n^2+\sin n^2}$ b) $(-1)^n\sin\left(\frac{\sqrt{n+1}}{n}\right)$ c) $\dfrac{(-1)^n\sqrt{n}+1}{n}$ d) $e^{\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}}-1$

e) $\sqrt{1+\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}}-1$ f) $(-1)^n\dfrac{\ell n\, n}{n}$ g) $\ell n\left(1+\frac{(-1)^n}{n^\beta}\right)$ h) $\dfrac{\cos\sqrt{n}}{n\sqrt{n}}$

i) $\dfrac{(-1)^n}{n^{3/4}+\cos n}$ j) $\dfrac{(-1)^n}{\ln n+\sin(2n\pi/3)}$ k) $\dfrac{(-1)^n\sqrt{n}}{n+(-1)^n\sqrt{n}+1}$ l) $n^{\frac{(-1)^n}{n}}-1$

Exercice n°55

Soient $u_n=\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ et $v_n=\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$. Étudier la nature des séries (u_n) et (v_n).

Exercice n°56

Soient (u_n) et (v_n) deux séries à termes positifs telles que : $\forall n\geqslant N,\ \dfrac{u_{n+1}}{u_n}\leqslant\dfrac{v_{n+1}}{v_n}$.

1) Montrer que si $\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ converge.

2) En déduire la convergence de la série de terme général $u_n=\dfrac{1\times3\times5\times\cdots\times(2n-1)}{2\times4\times6\times\cdots\times(2n+2)}$ (on prendra $v_n=n^{-\alpha}$ avec $1<\alpha<3/2$ et on utilisera le DL à l'ordre 1 de $\dfrac{v_{n+1}}{v_n}-\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$).

Exercice n°57

1) Soient (a_n) une suite de réels et (b_n) une suite de complexes. On suppose que :
- la suite (a_n) est décroissante et converge vers 0,
- il existe une constante $K>0$ telle que pour tous entiers naturels $n\leqslant m$ on ait $\left|\sum_{p=n}^{m}b_p\right|\leqslant K$,

Montrer que la série $\sum a_nb_n$ est convergente.

2) Etudier la nature des séries de terme général : $\dfrac{\cos n}{n^2},\quad \dfrac{\cos n}{n},\quad \dfrac{\cos^2 n}{n},\quad \dfrac{e^{in\alpha}}{n}$ *avec* $\alpha\in[0,2\pi]$.

Exercice n°58 *(CAPES 2010 - Première composition)*

On pose, pour tout entier naturel n, $r_n = \sum_{k=2^n}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k}$. Montrer que la série de terme général r_n est absolument convergente.

Intégrales

Exercice n°59 *(CAPES 2011 - Oral 2)*

Soit f la fonction définie sur $[0;1]$ par $f(x) = x(1-x^2)$.

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

On note $\mathscr{D}$ l'ensemble des points $M(x;y)$ tels que : $0 \leqslant x \leqslant 1$ et $0 \leqslant y \leqslant x(1-x^2)$.

1) Calculer l'aire du domaine $\mathscr{D}$.

2) Existe-t-il une droite (Δ) passant par l'origine et partageant le domaine $\mathscr{D}$ en deux parties de même aire ?

Exercice n°60

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$. On suppose qu'il existe un réel $k > 0$ tel que $\forall x, y \in [0,1]$, $|f(x) - f(y)| \leqslant k\,|x-y|$. On pose $\alpha_n = \int_0^1 f(t)\,dt - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(\frac{i}{n})$. Montrer que $|\alpha_n| \leqslant \frac{k}{2n}$.

Exercice n°61 *(CAPES 2013 - Première composition)*

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a,b]$, avec $a < b$. Démontrer que :

$$\int_a^b f(x)dx = 0 \Longrightarrow \forall x \in [a,b],\ f(x) = 0$$

On pourra procéder par contraposition.

Exercice n°62

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a,b]$ avec $a \leqslant b$ à valeurs réelles telles que, pour tout $x \in [a,b]$, on ait $f(x)g(x) \geqslant 1$. Montrer que $\int_a^b f(x)\,dx \int_a^b g(x)\,dx \geqslant (b-a)^2$.

Exercice n°63 *(CAPES 2009 - Première composition ; CAPES 2014 - Deuxième composition)*

Pour tout entier naturel n, on pose : $W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t\,dt$.

1) Montrer que la suite $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et strictement positive.

2) Montrer que pour tout entier naturel n, on a : $(n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n$.

3) En déduire que, pour tout entier $p \geqslant 0$, on a $W_{2p} = \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}\frac{\pi}{2}$ et $W_{2p+1} = \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}$.

Exercice n°64 *(CAPES 2009 - Oral 2)*

On considère la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par : $f(x) = \sqrt{x}e^{1-x}$.

1) Donner le tableau de variation de f et tracer l'allure de sa représentation graphique dans un repère orthonormal.

2) On considère la fonction F définie sur $[1,+\infty[$ par $F(x)=\displaystyle\int_1^x f(t)\,dt$.

a) Démontrer que pour tout réel t positif, on a : $2\sqrt{2}\sqrt{t}\leqslant t+2$.

b) En déduire que pour tout réel x appartenant à $[1,+\infty[$ on a : $0\leqslant F(x)\leqslant \dfrac{1}{2\sqrt{2}}\left(4-(x+3)e^{1-x}\right)$.

c) En déduire que pour tout réel x appartenant à $[1,+\infty[$ on a : $0\leqslant F(x)\leqslant \sqrt{2}$.

3) La fonction F admet-elle une limite en $+\infty$?

Exercice n°65

Étudier la convergence et la convergence absolue des intégrales :

a) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\ell n\, t}{1+t^2}\,dt$ b) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\sin x\,\sin\frac{1}{x^2}\,dx$ c) $\displaystyle\int_0^{1}(\ell n\, t)(\sin\frac{1}{t})\,dt$

d) $\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-t^2}\cos t\,dt$ e) $\displaystyle\int_0^{+\infty}te^{-t^2}\left(t^2\sin t-\cos\frac{1}{t}\right)dt$ f) $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{(\ell n\, t)\cos t}{t^{3/2}}\,dt$

g) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{t}\cos(t^2)}{e^t-1}\,dt$ h) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,e^{-t}\,dt$

Exercice n°66 *(CAPES 1993)*

Montrer que pour tout $x>0$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{t\sin t}{x^2+t^2}\,dt$ converge (on pourra effectuer une intégration par parties).

Exercice n°67 *(d'après CAPES 2010 - Première composition)*

Montrer la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-t}\left(\frac{1}{1-e^{-t}}-\frac{1}{t}\right)dt$.

Exercice n°68 *(CAPES 2010 - Première composition)*

Soient a et b deux réels strictement positifs.

1) Soient $x,y\in\mathbb{R}^{+*}$. Montrer que $\displaystyle\int_x^y\frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}dt=\int_{ax}^{bx}\frac{e^{-t}}{t}dt-\int_{ay}^{by}\frac{e^{-t}}{t}dt$.

2) Montrer que pour $a\leqslant b$, $\forall z>0$, $\displaystyle e^{-bz}\ell n\,\frac{b}{a}\leqslant\int_{az}^{bz}\frac{e^{-t}}{t}dt\leqslant e^{-az}\ell n\,\frac{b}{a}$.

3) Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}dt=\ell n\,\frac{b}{a}$.

Exercice n°69

Comparer la convergence des intégrales $\displaystyle\int_1^{\infty}\frac{\sin x}{\sqrt{x}}dx$ et $\displaystyle\int_1^{\infty}\ell n\left(1+\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\right)dx$.

Exercice n°70 *(CAPES 1986)*

1) Soit f une fonction continue 2π-périodique. Montrer que pour tout réel a $\displaystyle\int_a^{a+2\pi}f(t)dt=\int_{-\pi}^{\pi}f(t)dt$.

2) Montrer que pour toutes fonctions continues 2π-périodiques f et g, la fonction h définie par $h(x)=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(x-t)g(t)dt$ est continue et 2π-périodique.

Exercice n°71 *(CAPES 2008 - Deuxième composition)*

Montrer que la série $\sum \dfrac{1}{n\ell n^2 n}$ est convergente, que la série $\sum \dfrac{1}{n\ell n\, n}$ est divergente et qu'on a

$$\sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{k\ell n\, k} = \ell n\, \ell n\, n + O(1)$$

(On comparera les séries considérées avec les intégrales généralisées $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dt}{t\ell n^2 t}$ et $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dt}{t\ell n\, t}$)

Suites et séries de fonctions

Exercice n°72

Étudier la convergence simple et uniforme des suites de fonctions suivantes :

1) $f_n : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = \ell n \left(x + \frac{1}{n}\right)$, avec $n \in \mathbb{N}^*$.

2) $g_n : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $g_n(x) = \dfrac{ne^{-x} + x^2}{n + x}$, avec $n \in \mathbb{N}^*$.

3) $h_n : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $h_n(x) = nx^2 e^{-nx}$, avec $n \in \mathbb{N}$.

4) $k_n : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $k_n(x) = \dfrac{nx}{1 + n^3 x^2}$, avec $n \in \mathbb{N}$.

Exercice n°73

Soit $f_n : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = \dfrac{n + x}{nx + 1}$, avec $n \in \mathbb{N}$.

1) Étudier la convergence simple de la suite $(f_n)_n$.

2) Trouver les intervalles sur lesquels la convergence est uniforme.

3) Étudier la convergence de la suite $(f'_n)_n$.

Exercice n°74

Soit $f_n : [0, 2] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = \frac{x^n}{x^n + 1}$, avec $n \in \mathbb{N}$.

1) Étudier la convergence simple de la suite $(f_n)_n$.

2) Trouver les intervalles sur lesquels la convergence est uniforme.

3) Montrer que $\displaystyle\lim_{n \to \infty} \int_0^2 f_n(t)dt = 1$.

Exercice n°75

Montrer que la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} (-1)^n \frac{n + x^2}{n^2}$ ne converge absolument en aucun x réel mais que cette série converge uniformément sur tout compact de $\mathbb{R}$.

Exercice n°76

Étudier la convergence simple, uniforme et normale des séries de fonctions suivantes :

1) $f_n : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = \dfrac{nx^2}{n^3 + x^2}$.

2) $g_n : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $g_n(x) = \dfrac{n+x}{n^3+x^2}$.

3) $h_n : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $h_n(x) = \dfrac{1}{1+x^n}$.

Exercice n°77

Soit $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = \dfrac{x}{(x^2+1)^n}$, avec $n \in \mathbb{N}^*$.

1) Montrer que les sommes partielles de la série de terme général f_n sont bornées et continues sur $\mathbb{R}$.

2) Calculer la somme S de la série.

3) Montrer que S n'est ni continue, ni bornée sur $\mathbb{R}$. Que peut-on en déduire ?

Exercice n°78

Soit $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = (-1)^{n+1}\dfrac{e^{-nx}}{n}$, avec $n \in \mathbb{N}^*$.

1) Étudier la convergence simple, normale et uniforme de la série de fonctions de terme général f_n.

2) Montrer que la somme f de la série de fonctions est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$.

3) Calculer f.

Exercice n°79

Soit $\zeta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$. On définit ainsi la fonction Zeta de Riemann.

1) Quel est le domaine de définition de la fonction ζ ?

2) Montrer que ζ est strictement décroissante et convexe. En déduire que $\displaystyle\lim_{x\to 1^+} \zeta(x) = +\infty$.

3) Montrer que pour tout $x \geqslant 2$ et tout $N \geqslant 1$ on a : $1 \leqslant \zeta(x) \leqslant \displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^x} + \sum_{n \geqslant N+1} \frac{1}{n^2}$.

En déduire que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \zeta(x) = 1$.

4) Montrer que ζ est de classe C^∞ et que $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $\forall x > 1$, $\zeta^{(p)}(x) = \displaystyle\sum_{n \geqslant 2} \frac{(-\ell n\, n)^p}{n^x}$.

Retrouver ainsi le résultat de la question 2).

5) Pour $n \geqslant 2$ et $x > 0$, montrer les inégalités $\displaystyle\int_n^{n+1} t^{-x}\, dt \leqslant n^{-x} \leqslant \int_{n-1}^{n} t^{-x}\, dt$.

6) En déduire que pour $x > 1$ et $N \geqslant 2$ on a : $\dfrac{N^{1-x}}{x-1} \leqslant \displaystyle\sum_{n \geqslant N} \frac{1}{n^x} \leqslant \frac{(N-1)^{1-x}}{x-1}$.

7) Montrer que $\zeta(x) - 1 \underset{x\to+\infty}{\sim} 2^{-x}$ et que $\zeta(x) \underset{x\to 1}{\sim} \dfrac{1}{x-1}$.

Exercice n°80 *(CAPES 1997)*

Pour tout entier $k \geqslant 1$, on pose $f_k : x > 0 \longmapsto \dfrac{1}{k^{x+1}}$.

1) Montrer que pour tout entier $r \geqslant 1$, la série de fonctions $\left[f_k^{(r)}\right]$ converge normalement sur tout intervalle $[\alpha, +\infty[$ $(\alpha > 0)$.

2) En déduire que la fonction $S : x > 0 \longmapsto \displaystyle\sum_{k \geqslant 1} \frac{1}{k^{x+1}}$ est de classe C^∞.

3) Montrer que S est décroissante et convexe.

Exercice n°81

La limite supérieure d'une suite de nombres réels $(a_n)_n$ est définie par $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{p\to\infty} (\sup\limits_{n\geqslant p} a_n)$.

1) Soit $(b_n)_n$ une suite de réels positifs. Montrer que si la limite supérieure de $(b_n^{1/n})_n$ est strictement inférieure à 1, alors la série numérique $\sum_n b_n$ converge, alors que si elle est strictement supérieure à 1, la série $\sum_n b_n$ diverge.

2) En déduire que le rayon de convergence R de la série entière $\sum_n a_n z^n$ satisfait $\dfrac{1}{R} = \limsup\limits_{n\to\infty} |a_n|^{1/n}$.

3) Donner le rayon de convergence des séries entières $\sum_n n!z^n$, $\sum_n \dfrac{1}{n!} z^n$, $\sum_n z^n$, $\sum_n \dfrac{1}{n} z^n$.

4) Montrer que les séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum n a_n z^n$ ont même rayon de convergence.

Exercice n°82

Trouver le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$ lorsque :

$a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell \neq 0$	(a_n) est périodique non nulle	$a_n = \sum\limits_{d\mid n} d^2$
$a_n = \dfrac{n^n}{n!}$	$a_{2n} = a^n$ et $a_{2n+1} = b^n \quad (0 < a < b)$	$a_n = e^{\sqrt{n}}$
$a_n = \dfrac{1.4.7\ldots(3n-2)}{n!}$	$a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}^{\sqrt{n}}}$	$a_n = \arccos\left(\dfrac{n-1}{n}\right)$
$a_n = \dfrac{\cos n\theta}{\sqrt{n} + (-1)^n}$	a_n est le nombre de diviseurs de n	

Exercice n°83

On définit la fonction cosinus sur $\mathbb{R}$ par $\cos x = Re(e^{ix})$.

1) Montrer que $\cos x + 1 = 2\cos^2(\frac{x}{2})$ pour $x \in \mathbb{R}$.

2) Montrer que $\cos 2 \leqslant 0$.

3) Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $\cos\alpha = 0$ et tel que pour $0 \leqslant x < \alpha$, on ait $\cos x > 0$.

4) Montrer que $\cos : \mathbb{R} \longrightarrow [-1, 1]$ est surjective.

Exercice n°84 *(d'après CAPES 1996)*

Montrer que l'équation différentielle $-t^2 y''(t) - 2ty'(t) + y(t) = \text{Arctan}\, t$ admet une solution développable en série entière au voisinage de 0.

Exercice n°85 *(d'après CAPES 1986)*

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = |\sin\frac{t}{2}|$.
Montrer que f est développable en série de Fourier. et calculer ses coefficients de Fourier trigonométriques.

Exercice n°86 *(CAPES 1997)*

Pour $x \neq 0$ fixé, on considère la fonction f 2π-périodique définie sur $]-\pi, \pi]$ par $f(t) = \text{ch}\, xt$.

1) Montrer que f est paire, continue et de classe C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$.

2) Calculer les coefficients de Fourier trigonométriques de f.

3) Montrer que f est somme de sa série de Fourier et en déduire que $\pi\coth(\pi x) - \dfrac{1}{x} = \sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{2x}{x^2+n^2}$.