UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Analyse et Probabilités 1

Feuille d'exercices d'analyse n°3

Fonctions dérivables - Accroissements finis

Révisions n°1

- Rappeler la définition de la dérivabilité d'une fonction à valeurs réelles en un point a de $\mathbb{R}$.
  Donner des exemples simples, tous justifiables à l'aide de la définition.
  Donner une autre définition, équivalente à la première. Interpréter graphiquement.
- Rappeler la formule de Leibniz de dérivation à l'ordre n d'un produit de fonctions. Démontrer cette formule en utilisant un raisonnement par récurrence.
- Rappeler ce qu'est une fonction de classe C^k sur un intervalle. Donner un exemple de fonction dérivable sur un intervalle mais qui n'est pas de classe C^1.
- Donner un exemple de fonction non identiquement nulle, de classe C^∞, dont toutes les dérivées sont nulles en 0.

Exercice n°1

Pour tout réel λ, $-\mathbf{1} \leqslant \lambda \leqslant \mathbf{1}$, on considère la fonction f_λ donnée par $f_\lambda(x) = \ell n\,(x^2 - 2\lambda x + 1)$. Soit C_λ la courbe représentative de f_λ dans un repère orthonormal $(O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$ du plan.

1) Déterminer suivant les valeurs de λ l'ensemble de définition de f_λ et montrer que la droite d'équation $x = \lambda$ est un axe de symétrie pour C_λ.
Par quelle transformation géométrique simple peut-on déduire $C_{-\lambda}$ de C_λ ?

2) Etudier, en discutant suivant les valeurs de λ, la fonction f_λ. On précisera les variations, les limites aux bornes de l'ensemble d'étude et les branches infinies éventuelles.

3) Soit M_0 un point du plan de coordonnées (x_0, y_0). Combien de courbes C_λ passent par M_0 ?

Exercice n°2

Soit $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ une fonction continue qui ne s'annule pas sur $]a, b[$. Montrer que si la fonction carrée f^2 est dérivable, il en est de même de f.

Exercice n°3 *(CAPES 2011 - Première composition)*

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I d'intérieur non vide et soit $(a, b) \in I^2$ avec $a < b$. On suppose $f'(a) < f'(b)$ et on considère $\lambda \in]f'(a), f'(b)[$. Soit g la fonction définie sur I par $g(x) = f(x) - \lambda x$.

1) Justifier l'existence d'un $c \in [a, b]$ tel que $g(c) = \inf_{x\in[a,b]} g(x)$ et montrer que $c \notin \{a, b\}$.

2) En déduire que f' vérifie la propriété des valeurs intermédiaires.

3) Donner alors un exemple de fonction définie sur $\mathbb{R}$ ne possédant pas de primitive sur $\mathbb{R}$.

Exercice n°4 *(CAPES 2021 - Première composition)*

On considère la fonction f définie sur $[0; \frac{\pi}{2}]$ par

$$f : t \longmapsto \begin{cases} \dfrac{t}{\sin(t)} \text{ si } t > 0, \\ 1 \text{ si } t = 0. \end{cases}$$

1. Démontrer que, f est continue sur $[0; \frac{\pi}{2}]$.

2. Démontrer que f est dérivable en 0.

3. Démontrer que, f est de classe C^1 sur $[0; \frac{\pi}{2}]$.

Révisions n°2

- Énoncer le théorème de Rolle *(CAPES 2016 - première composition)*. En proposer une démonstration. Donner des exemples simples montrant l'importance des hypothèses de ce théorème.
- *(CAPES 2016 - première composition)*
  On suppose que $g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est n fois dérivable sur $[a, b]$ et s'annule en au moins $n + 1$ points distincts de $[a, b]$. Montrer que la fonction dérivée n-ième $g^{(n)}$ s'annule en au moins un point de $[a, b]$.
- Rappeler le théorème des accroissements finis. En donner une démonstration. Appliquer ce théorème à une fonction trinôme du second degré. Quelle propriété géométrique en déduit-on ?

Exercice n°5

1) Soit $\alpha > 0$. À l'aide du théorème des accroissements finis appliqué à $x \longmapsto \dfrac{1}{x^\alpha}$, montrer que pour tout n de $\mathbb{N}\backslash\{0, 1\}$, $\quad \dfrac{1}{n^{1+\alpha}} < \dfrac{1}{\alpha}\left(\dfrac{1}{(n-1)^\alpha} - \dfrac{1}{n^\alpha}\right)$.

2) En déduire que la suite donnée par $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}$ converge pour $\alpha > 1$.

Exercice n°6

On définit la fonction f de la variable réelle x par $f(x) = x + 2x^2 \sin \dfrac{1}{x}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.

1) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

2) A l'aide de la définition de la dérivée, montrer que f est dérivable en 0 et que $f'(0) = 1$.

3) Peut-on en déduire que f est croissante près de 0 ?

4) Montrer que sur tout intervalle $[-\alpha, \alpha]$ il existe des points où f' vaut 1 et des points où f' vaut -1.

5) Qu'en déduit-on du point de vue de la monotonie de f au voisinage de 0 ?

Exercice n°7

Soit $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ de classe C^2 telle que $f(-1) = f(1) = 0$.
Montrer que, pour tout α de $]-1, 1[$, il existe un polynôme P de degré $\leqslant 2$ tel que la fonction $g = f + P$ s'annule en -1, 1 et α. En déduire que $f(\alpha) = \frac{\alpha^2-1}{2} f''(c)$ où $c \in]-1, 1[$, puis que :

$$\sup_{x\in[-1,1]} |f(x)| \leqslant \frac{1}{2} \sup_{x\in[-1,1]} |f''(x)|$$

Exercice n°8

Soit f une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}$, de classe C^2 sur $\mathbb{R}$. On suppose que $f(0) = f'(0) = 0$. On pose
$g(x) = \begin{cases} f(\sqrt{x}) & \text{si } x \geqslant 0 \\ f(-\sqrt{-x}) & \text{si } x < 0 \end{cases}$

1) Vérifier que g est de classe C^1 sur chacun des intervalles $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$.

2) Vérifier que g est continue sur $\mathbb{R}$.

3) Calculer $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} g'(x)$ et $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} g'(x)$.

4) Donner une condition nécessaire et suffisante, portant sur $f''(0)$, pour que g soit de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

$\boxed{\textbf{Exercice n°9}}$ *(CAPES 2000)*

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $L_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t \mapsto \dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}(t^2-1)^n$. Montrer que $L_n(1) = 2^n n!$ et calculer $L_n(-1)$.

$\boxed{\textbf{Exercice n°10}}$ *(d'après CAPES 2002)*

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation $f(x) = xf'(\frac{x}{2})$.

1) Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

2) On suppose en outre f de classe C^n ($n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$). En utilisant la formule de Taylor-Young, montrer que, pour tout entier p compris entre 1 et n, on a : $f^{(p)}(0) = 0$ ou $p2^{1-p} = 1$.

$\boxed{\textbf{Exercice n°11}}$ *(CAPES 1991)*

Soit f une fonction positive, de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et telle que f'' soit bornée sur $\mathbb{R}$.

1) On note $M = \sup\limits_{x \in \mathbb{R}} |f''(x)|$.

a) Montrer, en appliquant la formule de Taylor avec reste de Lagrange à la fonction f que, pour tout couple de réels (x, λ) on a : $f(x) + \lambda f'(x) + \dfrac{\lambda^2}{2}M \geqslant 0$.

b) En déduire que pour tout réel x on a : $|f'(x)| \leqslant \sqrt{2M.f(x)}$.

2) Soit x_0 un réel tel que $f(x_0) = 0$. On pose $g = \sqrt{f}$.

a) Montrer que pour tout réel x, $x \neq x_0$, il existe un réel c compris entre x_0 et x tel que :
$f(x) = \frac{1}{2}(x - x_0)^2 f''(c)$ (on pourra commencer par remarquer que $f'(x_0) = 0$).

b) En déduire que si $f''(x_0) > 0$, g n'est pas dérivable en x_0.

$\boxed{\textbf{Exercice n°12}}$

1) Soit f une fonction convexe et dérivable sur un intervalle I et $a, x \in I$.
Montrer que $f(x) \geqslant f(a) + f'(a)(x-a)$. Quelle interprétation géométrique peut-on donner de cette inégalité ?

2) Soit $x > 0$. On pose $f(x) = \dfrac{1}{x}$. On rappelle que par définition $\ell n\,(x) = \displaystyle\int_1^x f(t)dt$.
En utilisant la convexité de f sur $[1, 2]$, majorer $\ell n\,(2)$ par la surface d'un trapèze.
En appliquant le 1) à la fonction f, pour $a = 2$, minorer $\ell n\,(3)$ par la surface d'un trapèze.
En déduire que $e \in]2, 3[$ (e est défini par $\ell n\,(e) = 1$).