UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Analyse et Probabilités 1

Feuille d'exercices d'analyse n°1

Suites numériques

Révisions n°1

- Qu'est-ce qu'une suite numérique ? Rappeler la définition d'une suite convergente. Donner des exemples simples, tous justifiables à l'aide de la définition.
  Rappeler la définition d'une suite divergente. Donner des exemples simples, tous justifiables à l'aide de la définition.
- Montrer qu'une suite convergente est bornée.

Exercice n°1

Étudier la nature des suites (u_n) définies par :

a) $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ **b)** $u_n = \dfrac{n + (-1)^n}{n + \ln n}$ **c)** $u_n = \dfrac{a^n - b^n}{a^n + b^n}$ pour $a > 0$ et $b > 0$

d) $u_n = \dfrac{n^2 + \cos n}{2^n + \sin n}$ **e)** $u_n = \displaystyle\prod_{p=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$

Exercice n°2 *(CAPES 2009 - Oral 2)*

On considère une suite numérique (u_n) positive et la suite (v_n) définie par $v_n = \dfrac{u_n}{1+u_n}$. Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier dans chaque cas.

1) La suite (v_n) est bornée.

2) Si la suite (u_n) est croissante, alors la suite (v_n) est croissante.

3) Si la suite (u_n) est convergente, alors la suite (v_n) est convergente.

4) Si la suite (v_n) est convergente, alors la suite (u_n) est convergente.

Exercice n°3

Étudier la nature des suites (u_n) définies par :

a) $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2 + k}$ **b)** $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{\sqrt{n^2 + k}}$ **c)** $u_n = \displaystyle\frac{1}{n!} \sum_{k=1}^{n} k!$

d) $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n + k}$ **e)** $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}$ **f)** $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$

$\boxed{\textbf{Exercice n°4}}$ *(CAPES 2012 et CAPES 2021 - Première composition)*

On considère la suite $(H_n)_{n\geqslant 1}$ définie par $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

Montrer que pour tout entier $k \geqslant 1$, $\frac{1}{k+1} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leqslant \frac{1}{k}$. En déduire que $H_n \underset{n\to\infty}{\simeq} \ell n\, n$.

$\boxed{\textbf{Exercice n°5}}$

1) *(d'après CAPES 2014 - Oral 2)* Un magazine est vendu uniquement par abonnement. Le modèle économique prévoit qu'il y ait 1 800 nouveaux abonnés chaque année et que d'une année sur l'autre, 15 % des abonnés ne se réabonnent pas. En 2013, il y avait 8 000 abonnés.
Pour tout entier naturel n, on note u_n le nombre de milliers d'abonnés prévus en $(2013+n)$. Expliciter une relation entre u_{n+1} et u_n puis donner l'expression de u_n en fonction de n.

2) *(CAPES 2016 - Oral 2)* On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 7$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 10u_n - 18$. Déterminer, pour tout entier naturel n, l'expression de u_n en fonction de n.

3) *(CAPES 2021 - Oral 2)* Lors de la construction d'un barrage, on a créé un lac artificiel contenant initialement 80 000 m^3 d'eau. À partir des données recueillies, on estime que le lac est alimenté par un apport de 6 000 m^3 d'eau par an.
Si 10 % du volume de ce lac est prélevé chaque année pour produire de l'électricité, comment évolue le volume d'eau du lac au cours du temps ? Justifier.

D'après Hachette, collection Barbazo, terminale S

$\boxed{\textbf{Exercice n°6}}$ *(CAPES 2007 - Oral 2)*

Soit (x_n) la suite définie par $\begin{cases} x_{n+1} &= \frac{1}{2}x_n + \frac{1}{2^n} \\ x_0 &= 1 \end{cases}$

1) Déterminer x_1, x_2, x_3 et x_4, en laissant les résultats sous forme fractionnaire.

2) Montrer que la suite (x_n) est décroissante à partir du rang $n = 1$.

3) Montrer que la suite (x_n) est convergente et déterminer sa limite.

4) Conjecturer l'expression générale de x_n en fonction de n et démontrer cette égalité.

$\boxed{\textbf{Exercice n°7}}$ *(CAPES 2013 - Oral 2)*

Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 3u_n - 2n + 3$.

1) Montrer que pour pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant n$.

2) En déduire les variations et la limite de la suite (u_n).

3) Construire un algorithme qui prend en entrée un réel A strictement positif et renvoie le plus petit entier n tel que $u_n > A$.

$\boxed{\textbf{Exercice n°8}}$ *(CAPES 2019 - Oral 2)*

On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = 3$ et pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = u_n^2 - u_n.$$

Étudier le sens de variation de cette suite.

Révisions n°2

- Rappeler la définition de la borne supérieure d'une partie E de $\mathbb{R}$. Écrire (à l'aide de quantificateurs) une phrase mathématique signifiant que le réel M est la borne supérieure de la partie non vide E de $\mathbb{R}$. La borne supérieure de E est-elle toujours un élément de E ? Donner des exemples.
- *(CAPES 2015 - première composition)*
  Démontrer que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante et non majorée, alors elle diverge vers $+\infty$.
  Démontrer que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante et majorée alors elle converge.
  Établir une condition nécessaire et suffisante pour qu'une suite décroissante soit convergente.
- *(CAPES 2018 - première composition)*
  Quand dit-on que deux suites réelles sont adjacentes ?
  On suppose que la suite réelle $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, que la suite réelle $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et que $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_n - b_n) = 0$. Montrer que la suite $(a_n - b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone et en déduire que pour tout entier naturel n, $a_n \leqslant b_n$.
  Justifier que les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes vers une même limite ℓ vérifiant :
  $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n \leqslant \ell \leqslant b_n$.
- Énoncer le théorème de Bolzano-Weierstrass.

Exercice n°9 *(CAPES 2021 - Première composition)*

On considère la suite définie pour tout entier naturel $n \geqslant 1$ par $b_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$.

Démontrer que, pour tout entier $k \geqslant 2$, $\frac{1}{k^2} \leqslant \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$. En déduire la convergence de la suite $(b_n)_{n\geqslant 1}$.

Exercice n°10

Les suites (u_n) et (v_n) convergent-elles ?

a) $u_n = \sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k+1}\frac{1}{k}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{2n+1}$ **b)** $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n^2}$

Exercice n°11

On définit la suite (u_n) par $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}}$. Montrer que les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont adjacentes.
Que peut-on en déduire ? *(CAPES 2022 - Première composition)*

Exercice n°12 *(CAPES 2015 - Première composition)*

On considère la suite définie pour tout entier naturel $n \geqslant 1$ par $a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

Démontrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, $a_{2n} - a_n \geqslant \frac{1}{2}$. La suite $(a_n)_{n\geqslant 1}$ est-elle convergente ?

Exercice n°13 *(CAPES 2013 et CAPES 2018 - Première composition)*

On rappelle que $e = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}$. On se propose de démontrer que le nombre e est un nombre irrationnel. Pour cela, on fait l'hypothèse qu'il existe p et q, entiers naturels non nuls, tels que $e = \frac{p}{q}$ et on démontre que cette hypothèse conduit à une contradiction.

Pour tout entier naturel n non nul, on pose : $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n \times n!}$. Démontrer que les suites

$(u_n)_{\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes, puis montrer que : $u_q < e < v_q$.
Aboutir à une contradiction en multipliant les termes de cet encadrement par $q! \times q$.

Exercice n°14 *(CAPES 2015 - Première composition)*

À toute suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$, on associe la suite $(v_n)_{n\geqslant 1}$ définie par $\forall n \geqslant 1,\ v_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k$. On dit que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge au sens de Cesàro si la suite $(v_n)_{n\geqslant 1}$ converge.

1) Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de limite nulle et $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$.

a) Montrer qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que, pour tout $n \geqslant n_0$, $\dfrac{1}{n}\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n_0} u_k\right) - \varepsilon \leqslant v_n \leqslant \dfrac{1}{n}\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n_0} u_k\right) + \varepsilon$.

b) En déduire que la suite $(v_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers 0.

2) Énoncer et démontrer la généralisation du résultat précédent au cas où la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers un réel ℓ quelconque.

3) La réciproque de ce dernier résultat est-elle exacte ?