

Algèbre et Géométrie 1

Feuille d'exercices de géométrie n°3

Barycentres

Révisions

- 1) Donner la définition du **barycentre** de n points pondérés. Qu'est-ce qu'un **isobarycentre**?
- 2) Rappeler et démontrer la propriété d'**associativité du barycentre**.
- 3) Comment caractériser une droite (respectivement un segment) à l'aide des barycentres?
- 4) Qu'appelle-t-on partie **convexe** du plan (respectivement de l'espace)?

Exercice n°1

- 1) Montrer que les trois médianes d'un triangle sont concourantes en le centre de gravité du triangle.
- 2) Soient \mathcal{E} un espace affine de dimension 3, et $ABCD$ un tétraèdre de \mathcal{E} . Montrer que les droites joignant les milieux des côtés opposés du tétraèdre sont concourantes.
- 3) (*BAC S - 2011*) Dans cette question, $ABCD$ est un tétraèdre régulier. A' est le centre de gravité du triangle BCD . Soit G l'isobarycentre des points A, B, C et D . On souhaite démontrer la propriété (\mathcal{P}) : *Les médianes d'un tétraèdre régulier sont concourantes en G .*

En utilisant l'associativité du barycentre, montrer que G appartient à la droite (AA') , puis conclure.

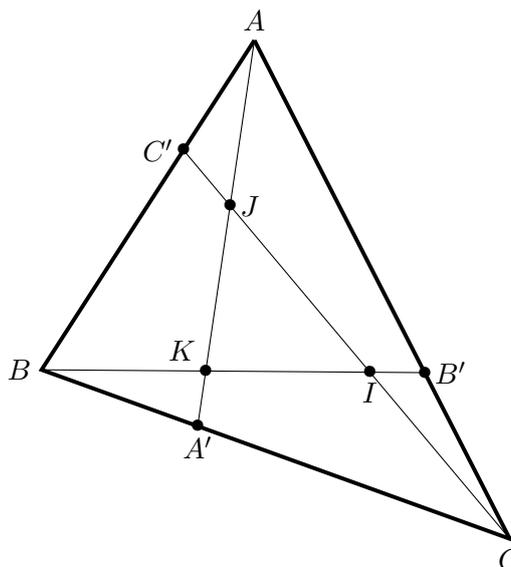
Exercice n°2 (*Capes 2006 - Épreuve sur dossier*)

Soit ABC un triangle du plan.

Les points A', B' et C' sont respectivement définis par $\overrightarrow{AC'} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BA'} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CB'} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CA}$.

Les droites (AA') et (BB') se coupent en un point K , les droites (BB') et (CC') se coupent en un point I et les droites (AA') et (CC') en un point J .

- 1) Écrire les points A', B' et C' comme barycentres des points A, B et C .
- 2) Montrer que le point I est barycentre de $(A, 2)$, $(B, 1)$ et $(C, 4)$.
- 3) Définir de même les points J et K comme barycentres de A, B et C .
- 4) Montrer que les points I, J et K sont respectivement les milieux de $[CJ]$, $[AK]$ et $[BI]$.



Exercice n°3

On se place dans un espace affine euclidien \mathcal{A} . Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ et $(A_1, \dots, A_n) \in \mathcal{A}^n$. On considère l'application $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$ définie pour tout M de \mathcal{A} par $F(M) = \sum_{i=1}^n \alpha_i MA_i^2$.

- 1) On suppose $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 0$. Montrer qu'il existe un vecteur \vec{v} de \mathcal{A} , tel que

$$\forall (M, M') \in \mathcal{A}^2, F(M') = F(M) + 2 \langle \overrightarrow{MM'}, \vec{v} \rangle \quad (\vec{v} \text{ indépendant de } M \text{ et } M')$$

Pour $k \in \mathbb{R}$, en déduire la nature de l'ensemble des points M de \mathcal{A} tels que $MA_1^2 - MA_2^2 = k$. (On prendra garde aux cas particuliers.)

- 2) On suppose à présent que $\sum_{i=1}^n \alpha_i \neq 0$. Montrer que $F(M) = F(G) + \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i\right) MG^2$ où G est le barycentre du système $\{(A_1, \alpha_1), \dots, (A_n, \alpha_n)\}$.

En déduire, pour $k \in \mathbb{R}$, la nature de l'ensemble des points M de \mathcal{A} tels que $MA_1^2 + MA_2^2 = k$.

Exercice n°4

Soient ABC un triangle et \mathcal{C} son cercle inscrit. On note D, E et F les points de contact respectifs de \mathcal{C} avec les droites $(BC), (CA)$ et (AB) . Montrer que les droites $(AD), (BE)$ et (CF) sont concourantes en un point appelé **point de Gergonne** du triangle ABC . (On pourra introduire le barycentre de $\{(A, \frac{1}{AE}), (B, \frac{1}{BF}), (C, \frac{1}{CD})\}$.)

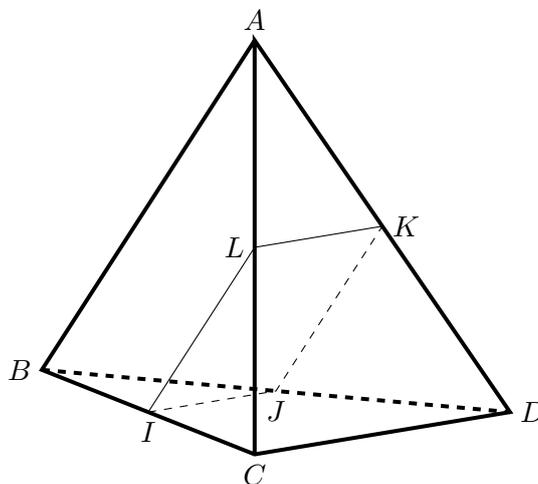
Exercice n°5

Sur la figure ci-contre, $ABCD$ est un tétraèdre et I, J, K, L sont les milieux respectifs des segments $[BC], [BD], [AD], [AC]$.

- 1) Soient $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et M un point de l'espace. Montrer que le point M est le barycentre du système $\{(A, x), (B, 1-x), (C, 1-y), (D, y)\}$ si et seulement si on a $2\overrightarrow{IM} = x\overrightarrow{BA} + y\overrightarrow{CD}$.

- 2) Montrer que l'ensemble des milieux M des segments $[PQ]$ où P décrit le segment $[AB]$ et Q le segment $[CD]$ est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{IM} = x\overrightarrow{IL} + y\overrightarrow{IJ}$ où x et y décrivent $[0, 1]$.

Décrire géométriquement cet ensemble de points.



Exercice n°6 (CAPES 2009 - Deuxième composition)

On dit qu'une partie Γ du plan \mathcal{P} est **convexe** si pour tout couple (A, B) de points de Γ , le segment $[AB]$ est contenu dans Γ : c'est à dire, en notant a et b les affixes respectives des points A et B , si pour tout $\lambda \in [0, 1]$, le point M_λ d'affixe $\lambda a + (1 - \lambda)b$ appartient à Γ . (En particulier, l'ensemble vide est convexe).

- 1) Soit P une partie de \mathcal{P} et E l'ensemble des parties de \mathcal{P} qui sont convexes et qui contiennent P . On pose $\mathcal{E}(P) = \bigcap_{\Gamma \in E} \Gamma$. Montrer que $\mathcal{E}(P)$ est la plus petite (au sens de l'inclusion) partie convexe contenant P . Cette partie $\mathcal{E}(P)$ est appelée l'**enveloppe convexe** de P .
- 2) Soit P une partie non vide de \mathcal{P} et notons \mathcal{B} l'ensemble des barycentres de familles finies de points de \mathcal{P} affectés de coefficients positifs. Montrer que $\mathcal{E}(P) = \mathcal{B}$.

Exercice n°7 (D'après la 2^{ème} épreuve de 2000)

Étant donnés quatre points non coplanaires A, B, C, D d'un espace affine \mathcal{E} de dimension 3, on appelle **tétraèdre** de sommets A, B, C, D l'enveloppe convexe T de ces quatre points c'est à dire l'intersection de toutes les parties convexes de \mathcal{E} contenant A, B, C, D .

- 1) Montrer que T n'est autre que l'ensemble des barycentres de ces quatre points affectés de masses positives ou nulles.
- 2) Un point X de T est dit **extrémal** si pour tous points Y et Z de T on a : $(X \in [YZ]) \implies X = Y$ ou $X = Z$. Montrer que les points extrémaux d'un tétraèdre sont ses sommets. D'une manière générale, on peut montrer que l'enveloppe convexe d'une partie finie de \mathcal{E} est égale à l'enveloppe convexe de ses points extrémaux.