UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Algèbre et Géométrie 1

Feuille d'exercices de géométrie n°3

Barycentres

Révisions

1) Donner la définition du ***barycentre*** de n points pondérés. Qu'est-ce qu'un ***isobarycentre*** ?

2) Rappeler et démontrer la propriété d'***associativité du barycentre***.

3) Comment caractériser une droite (respectivement un segment) à l'aide des barycentres ?

4) Qu'appelle-t-on partie ***convexe*** du plan (respectivement de l'espace) ?

Exercice n°1

1) Montrer que les trois médianes d'un triangle sont concourantes en le centre de gravité du triangle.

2) Soient $\mathscr{E}$ un espace affine de dimension 3, et $ABCD$ un tétraèdre de $\mathscr{E}$. Montrer que les droites joignant les milieux des côtés opposés du tétraèdre sont concourantes.

3) *(BAC S - 2011)* Dans cette question, $ABCD$ est un tétraèdre régulier. A$'$ est le centre de gravité du triangle BCD. Soit G l'isobarycentre des points A, B, C et D. On souhaite démontrer la propriété

($\mathscr{P}$) : *Les médianes d'un tétraèdre régulier sont concourantes en G.*

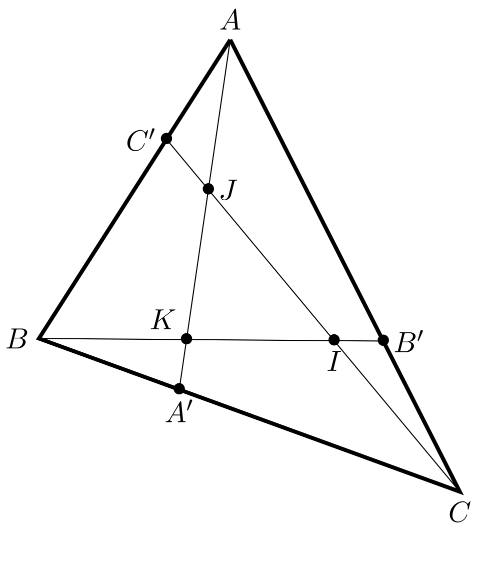
En utilisant l'associativité du barycentre, montrer que G appartient à la droite (AA'), puis conclure.

Exercice n°2 *(Capes 2006 - Épreuve sur dossier)*

Soit ABC un triangle du plan.

Les points A', B' et C' sont respectivement définis par $\overrightarrow{AC'} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BA'} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CB'} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CA}$.

Les droites (AA') et (BB') se coupent en un point K, les droites (BB') et (CC') se coupent en un point I et les droites (AA') et (CC') en un point J.



1) Écrire les points A', B' et C' comme barycentres des points A, B et C.

2) Montrer que le point I est barycentre de $(A, 2)$, $(B, 1)$ et $(C, 4)$.

3) Définir de même les points J et K comme barycentres de A, B et C.

4) Montrer que les points I, J et K sont respectivement les milieux de $[CJ]$, $[AK]$ et $[BJ]$.

Exercice n°3

On se place dans un espace affine euclidien $\mathscr{A}$. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ et $(A_1, \cdots, A_n) \in \mathscr{A}^n$. On considère l'application $F : \mathscr{A} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie pour tout M de $\mathscr{A}$ par $F(M) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i {MA_i}^2$.

1) On suppose $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 0$. Montrer qu'il existe un vecteur $\overrightarrow{v}$ de $\overrightarrow{\mathscr{A}}$, tel que

$$\forall (M, M') \in \mathscr{A}^2,\ F(M') = F(M) + 2 < \overrightarrow{MM'}, \overrightarrow{v} > \quad (\overrightarrow{v} \text{ indépendant de } M \text{ et } M')$$

Pour $k \in \mathbb{R}$, en déduire la nature de l'ensemble des points M de $\mathscr{A}$ tels que $MA_1{}^2 - MA_2{}^2 = k$. *(On prendra garde aux cas particuliers.)*

2) On suppose à présent que $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \neq 0$. Montrer que $F(M) = F(G) + \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\right) MG^2$ où G est le barycentre du système $\{(A_1, \alpha_1), \cdots, (A_n, \alpha_n)\}$.
En déduire, pour $k \in \mathbb{R}$, la nature de l'ensemble des points M de $\mathscr{A}$ tels que $MA_1{}^2 + MA_2{}^2 = k$.

Exercice n°4

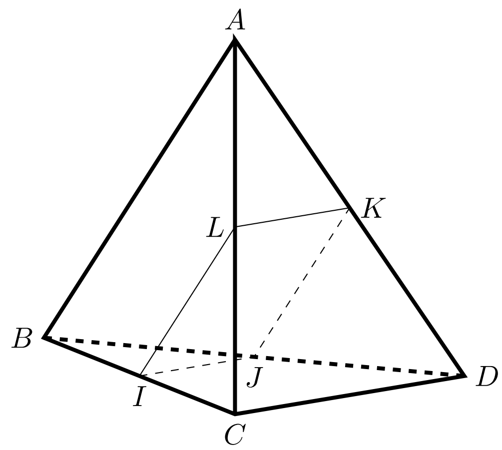
Soient ABC un triangle et $\mathscr{C}$ son cercle inscrit. On note D, E et F les points de contact respectifs de $\mathscr{C}$ avec les droites (BC), (CA) et (AB). Montrer que les droites (AD), (BE) et (CF) sont concourantes en un point appelé ***point de Gergonne*** du triangle ABC. *(On pourra introduire le barycentre de* $\{(A, AE), (B, BF), (C, CD)\}$*.)*

Exercice n°5

Sur la figure ci-contre, $ABCD$ est un tétraèdre et I, J, K, L sont les milieux respectifs des segments $[BC]$, $[BD]$, $[AD]$, $[AC]$.

1) Soient $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et M un point de l'espace. Montrer que le point M est le barycentre du système $\{(A, x), (B, 1-x), (C, 1-y), (D, y)\}$ si et seulement si on a $2\overrightarrow{IM} = x\overrightarrow{BA} + y\overrightarrow{CD}$.

2) Montrer que l'ensemble des milieux M des segments $[PQ]$ où P décrit le segment $[AB]$ et Q le segment $[CD]$ est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{IM} = x\overrightarrow{IL} + y\overrightarrow{IJ}$ où x et y décrivent $[0, 1]$.
Décrire géométriquement cet ensemble de points.



Exercice n°6 (D'après la 2ème épreuve de 2000)

Étant donnés quatre points non coplanaires A, B, C, D d'un espace affine $\mathscr{E}$ de dimension 3, on appelle *tétraèdre* de sommets A, B, C, D l'enveloppe convexe T de ces quatre points c'est à dire l'intersection de toutes les parties convexes de $\mathscr{E}$ contenant A, B, C, D.

1) Montrer que T n'est autre que l'ensemble des barycentres de ces quatre points affectés de masses positives ou nulles.

2) Un point X de T est dit *extrémal* si pour tous points Y et Z de T on a : $(X \in [YZ] \Longrightarrow X = Y$ ou $X = Z)$.
Montrer que les points extrémaux d'un tétraèdre sont ses sommets.
D'une manière générale, on peut montrer que l'enveloppe convexe d'une partie finie de $\mathscr{E}$ est égale à l'enveloppe convexe de ses points extrémaux.

Groupes d'isométries

Exercice n°7

Soit $\mathscr{C} = \mathscr{C}(O, r)$ un cercle du plan et f une application affine telle que $f(\mathscr{C}) = \mathscr{C}$. Montrer que f est une isométrie de point fixe O.

Exercice n°8

Dans le plan affine euclidien, déterminer l'ensemble des isométries conservant un segment. Vérifier que cet ensemble est un groupe.

Exercice n°9

Soit P un polygone convexe du plan, de centre O.

1) Montrer que l'ensemble des isométries du plan conservant P est un groupe.

2) Montrer que toute isométrie f du plan qui conserve P transforme un sommet de P en un sommet de P. En déduire que $f(O) = O$.

Exercice n°10

Soit ABC un triangle isocèle en A non equilatéral. Le but de cet exercice est d'étudier l'ensemble des isométries de $\mathscr{P}$ qui préservent globalement ABC.

1) Soit G l'isobarycentre de A, B et C. En étudiant les distances GA, GB, GC montrer que $f(A) = A$

2) En déduire (en utilisant la classification des isométries de $\mathbb{R}^2$) le groupe des isométries de ABC.

Exercice n°11

Soient ABC et $A'B'C'$ deux triangles tels que $AB = A'B'$, $AC = A'C'$, $BC = B'C'$. Combien y a-t-il d'isométries transformant ABC en $A'B'C'$?

Indication : si f et g sont deux telles isométries, alors $f \circ g^{-1}$ est une isométrie conservant ABC.

Exercice n°12

Déterminer le groupe des isométries du plan affine euclidien laissant globalement invariant :

1) un parallélogramme.

2) un losange.

3) un rectangle.

4) un carré.

5) la réunion de deux droites parallèles et distinctes.

Exercice n°13

Notons $D \subset \mathbb{R}^2$ une droite affine de $\mathbb{R}^2$.

1) Montrer que l'ensemble I_D des $g \in Iso(\mathbb{R}^2)$ telles que $g(D) = D$ est un sous-groupe de $Iso(\mathbb{R}^2)$.

2) Déterminer les translations qui appartiennent à I_D.

3) Montrer que si $g \in I_D$ possède un point fixe alors g a un point fixe sur D.

4) Soit $g \in I_D$, montrer qu'il existe une translation t de I_D telle que $g \circ t$ possède un point fixe.

5) Décrire I_D.