

Algèbre et Géométrie 1

Feuille d'exercices de géométrie n°2

Homothéties - Similitudes

Révisions

- 1) Donner la définition et les principales propriétés d'une homothétie. Montrer qu'une homothétie est une application affine.
- 2) Rappeler ce qu'est la composée de deux homothéties.

Exercice n°1

Montrer que l'ensemble des homothéties-translations planes (on parle aussi de *dilatations*) est l'ensemble des bijections du plan transformant une droite en une droite parallèle.

Exercice n°2

Montrer qu'une application f du plan \mathcal{P} dans lui-même est une dilatation si et seulement si

$$\exists k \in \mathbb{R}^* \quad \forall (M, N) \in \mathcal{P}^2 \quad \overrightarrow{f(M)f(N)} = k \overrightarrow{MN}$$

En déduire que l'ensemble des dilatations est un groupe pour la composition des applications.

Exercice n°3

Soit ABC un triangle. Construire un carré inscrit dans ce triangle.

Exercice n°4

Dans le plan, étant donnés deux droites \mathcal{D} et \mathcal{D}' sécantes en A et un point I n'appartenant ni à \mathcal{D} ni à \mathcal{D}' , construire si possible un cercle passant par I et tangent à \mathcal{D} et \mathcal{D}' .

Exercice n°5

- 1) Soit f une application non constante du plan affine euclidien \mathcal{P} dans lui-même. Montrer que f conserve le rapport des longueurs si et seulement si :

$$\exists k > 0, \forall (A, B) \in \mathcal{P}^2, \|\overrightarrow{f(A)f(B)}\| = k \|\overrightarrow{AB}\|$$

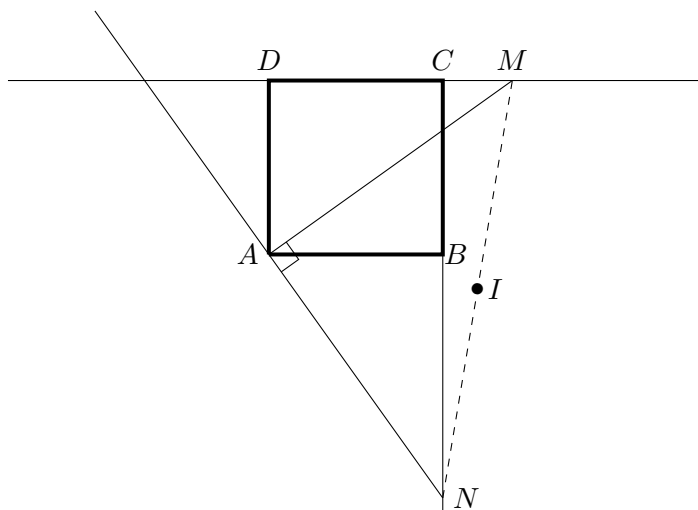
On dira alors que f est une *similitude de rapport* k .

- 2) Que peut-on dire d'une similitude qui fixe deux points distincts ?
- 3) Montrer que les similitudes du plan sont les composées d'une isométrie et d'une homothétie.
- 4) Montrer que l'ensemble des similitudes du plan est un groupe pour la composition des applications.
- 5) Soit $f : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$. Montrer que f est une similitude directe (respect. indirecte) si et seulement si son expression complexe est de la forme $\varphi(z) = az + b$ (resp. $\varphi(z) = a\bar{z} + b$) avec $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$. ($\varphi(z)$ désignant l'affixe de l'image par f du point d'affixe le nombre complexe z .)
- 6) Démontrer que toute similitude du plan de rapport $k \neq 1$ admet un unique point fixe Ω et s'écrit de manière unique sous la forme $f = h_{\Omega, k} \circ g$ où g est une isométrie commutant avec l'homothétie $h_{\Omega, k}$.

Exercice n°6

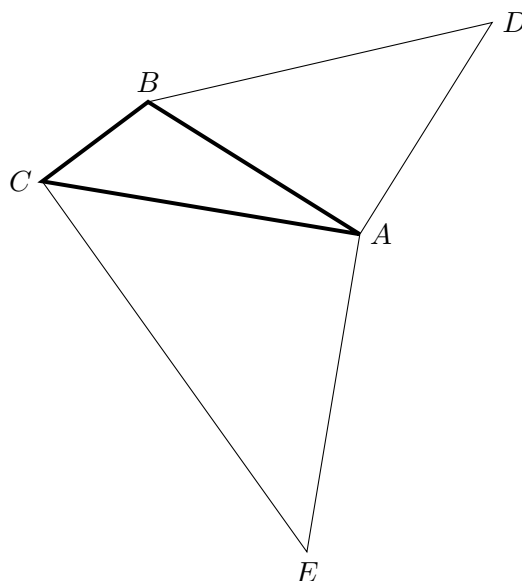
$ABCD$ est un carré direct du plan orienté. M est un point de (DC) . La perpendiculaire à (AM) passant par A coupe (BC) en N et I est le milieu de $[MN]$.

- 1) Montrer que le triangle rectangle AMN est isocèle.
- 2) Montrer que I est l'image de M par une similitude fixe.
- 3) Quel est l'ensemble décrit par le point I lorsque M décrit (DC) ?

**Exercice n°7**

Le plan est orienté. Soient A , B et C trois points non alignés tels que ABC est un triangle direct. On désigne respectivement par D et E les points tels que les triangles ACE et ADB sont directs, rectangles et isocèles en A . Le point O est le milieu de $[BC]$.

- 1) Construire le point F , symétrique du point C par rapport à A .
- 2) En utilisant une rotation de centre A et une homothétie de centre C , montrer que les droites (AO) et (DE) sont perpendiculaires et que $DE = 2AO$.

**Exercice n°8** (Épreuve sur dossier 2006)

On considère deux droites parallèles \mathcal{D} et \mathcal{D}' et un point A n'appartenant ni à \mathcal{D} ni à \mathcal{D}' . Le but de l'exercice est de construire un triangle ABC rectangle isocèle en B tel que le point B appartienne à la droite \mathcal{D} et que le point C appartienne à la droite \mathcal{D}' .

- 1) Si une telle construction est réalisable, déterminer les similitudes directes de centre A qui transforment B en C . Résoudre alors le problème posé. Combien y a-t-il de solutions?
- 2) Reprendre l'exercice en supposant les droites \mathcal{D} et \mathcal{D}' sécantes.

Exercice n°9

On considère dans le plan trois droites parallèles et distinctes (D_1) , (D_2) et (D_3) . Une droite (Δ) coupe (D_1) , (D_2) et (D_3) respectivement en A , B et C . Soit N un point de (D_2) distinct de B . La parallèle à (NC) passant par B coupe (D_1) en M . La parallèle à (NA) passant par B coupe (D_3) en P .

- 1) Soit h l'homothétie de centre A qui transforme B en C . Construire les points M' et N' images respectives de M et N par l'homothétie h .
- 2) En déduire les images de M et N par la transformation $f = t_{\vec{NB}} \circ h$
- 3) Montrer que les points M , N et P sont alignés.