

## Algèbre et Géométrie 1

### Feuille d'exercices de géométrie n°1

#### *Isométries du plan affine euclidien*

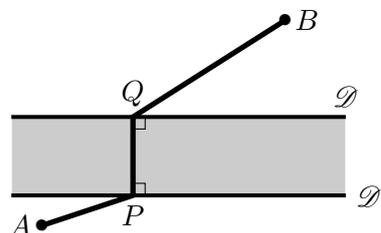
##### Révisions

- 1) Rappeler la définition d'un espace affine  $\mathcal{E}$ .
- 2) Comment définir une droite (affine) de  $\mathcal{E}$ ? Démontrer que par deux points distincts  $A$  et  $B$  de  $\mathcal{E}$  il passe une unique droite affine, notée  $(AB)$ .
- 3) Quand un espace affine  $\mathcal{E}$  est-il dit euclidien?
- 4) Rappeler la définition d'une isométrie de  $\mathcal{E}$ . Donner des exemples simples.

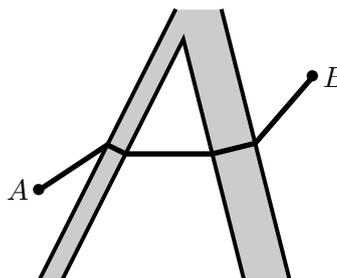
##### Exercice n°1

1) Dans la configuration ci-contre,  $A$  et  $B$  sont deux points fixes et  $P$  et  $Q$  sont variables respectivement sur les droites  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{D}'$  ( $(PQ)$  restant orthogonale aux deux droites parallèles  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{D}'$ ).

Où placer le pont  $[PQ]$  pour que le trajet de  $A$  à  $B$  soit le plus court possible?



2) De même, dans la configuration ci-contre, où doit-on construire les deux ponts (perpendiculairement aux berges de chaque rivière) pour relier les points  $A$  et  $B$  par le trajet de longueur minimale?



##### Exercice n°2 (Isométries du plan affine euclidien)

Soient  $\mathcal{P}$  un plan affine euclidien et  $f$  une isométrie de  $\mathcal{P}$ . On rappelle que, par définition, une rotation est une composée de deux réflexions dont les axes sont soit confondus, soit sécants en un point.

- 1) Montrer que s'il existe trois points  $A, B$  et  $C$  non alignés fixés par  $f$  (*i.e.*  $f(A) = A, f(B) = B$  et  $f(C) = C$ ), alors  $f$  est l'identité.
- 2) Montrer que si  $f$  fixe deux points distincts  $A$  et  $B$  alors  $f$  est soit l'identité soit la réflexion d'axe  $(AB)$ .
- 3) Soit  $A$  un point de  $\mathcal{P}$ . Montrer que l'ensemble des isométries qui laissent  $A$  invariant est réunion de l'ensemble des réflexions dont l'axe passe par  $A$  et des rotations qui laissent  $A$  invariant.
- 4) Montrer que toute isométrie du plan est composée d'au plus trois réflexions.
- 5) Montrer que l'ensemble  $Is(\mathcal{P})$  des isométries de  $\mathcal{P}$  est un groupe et que pour tout point  $O$  de  $\mathcal{P}$ , l'ensemble  $Is_o(\mathcal{P})$  des isométries de  $\mathcal{P}$  fixant  $O$  est un sous-groupe de  $Is(\mathcal{P})$ .

##### Exercice n°3

- 1) Montrer que la composée de deux réflexions par rapport à des droites parallèles est une translation.
- 2) Montrer que toute translation  $t_{\vec{u}}$  peut s'écrire comme composée  $s_{\mathcal{D}_2} \circ s_{\mathcal{D}_1}$  de deux réflexions d'axes parallèles ( $\mathcal{D}_1$  étant choisie arbitrairement mais orthogonale à  $\vec{u}$  et  $\mathcal{D}_2$  étant alors  $\mathcal{D}_2 = t_{\frac{1}{2}\vec{u}}(\mathcal{D}_1)$ ).

### Exercice n°4

- 1) Montrer que toute rotation de centre  $A$  et d'angle  $\theta$  peut se décomposer sous la forme  $r_{A,\theta} = s_{\mathcal{D}_2} \circ s_{\mathcal{D}_1}$  où  $\mathcal{D}_1$  et  $\mathcal{D}_2$  sont deux droites sécantes en  $A$ , l'une d'entre-elles pouvant être choisie arbitrairement (passant par  $A$ ).
- 2) (CAPES 2019 - Première composition) Donner une construction à la règle et au compas du centre de la rotation  $r_1 \circ r_2$  lorsque  $r_1$  est la rotation de centre d'affixe  $i$  et d'angle  $\pi$  et  $r_2$  est la rotation de centre  $O$  et d'angle  $\frac{\pi}{3}$ .
- 3) Montrer que l'ensemble des rotations du plan fixant le point  $A$  est un groupe pour la composition.
- 4) Que peut-on dire de la composée de deux rotations du plan ? Cette composée est-elle commutative ?

### Exercice n°5

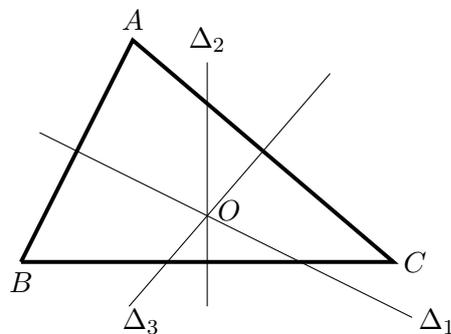
Montrer que la composée d'une réflexion d'axe  $\mathcal{D}$  et d'une translation de vecteur  $\vec{u}$  est une réflexion d'axe parallèle à  $\mathcal{D}$  si  $\vec{u} \perp \mathcal{D}$  et une symétrie glissée sinon.

### Exercice n°6

Donner le catalogue complet des différents types d'isométries du plan affine euclidien (justifier).

### Exercice n°7

- 1) Sur la figure ci-contre,  $ABC$  est un triangle quelconque du plan et  $O$  est le centre du cercle circonscrit à  $ABC$ .  $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$  sont les médiatrices respectives des segments  $[AB], [BC]$  et  $[CA]$ . Pour  $i \in \{1, 2, 3\}$ , on note  $s_i$  la réflexion d'axe  $\Delta_i$ . Déterminer la nature exacte de la transformation  $s_3 \circ s_2 \circ s_1$ .
- 2) Trois droites concourantes  $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$  étant données, expliquer comment construire un triangle  $ABC$  dont  $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$  sont les médiatrices.

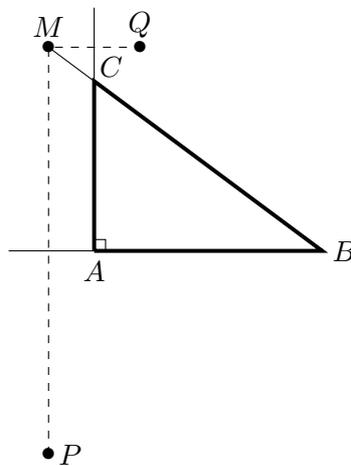


### Exercice n°8

Sur la figure ci-contre,  $ABC$  est un triangle rectangle en  $A$  du plan affine euclidien orienté.  $M$  est un point de  $(BC)$  et  $P$  et  $Q$  sont les symétriques respectifs de  $M$  par rapport aux droites  $(AB)$  et  $(AC)$ .

On note  $s_1$  la réflexion d'axe  $(AB)$  et  $s_2$  la réflexion d'axe  $(AC)$ .

- 1) Rappeler les différents types d'isométries du plan.
- 2) Quelle est la nature de l'application  $f = s_2 \circ s_1$  ?
- 3) En déduire que  $A$  est le milieu de  $[PQ]$ .
- 4) Montrer que  $(BP) \parallel (CQ)$ .



### Exercice n°9

Sur la figure ci-contre,  $ABC$  est un triangle quelconque du plan orienté. On a construit les triangles directs  $AMB$  et  $NAC$  rectangles isocèles. On note  $I$  le milieu de  $[BC]$ . Soit  $f = r_{N,\frac{\pi}{2}} \circ r_{M,\frac{\pi}{2}}$  où  $r_{\Omega,\alpha}$  désigne la rotation de centre  $\Omega$  et d'angle de mesure  $\alpha$ .

- a) Déterminer  $f(B)$ . Préciser alors la nature exacte de la transformation  $f$ .
- b) Rappeler pourquoi on peut trouver deux droites  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{D}'$  telles que  $r_{N,\frac{\pi}{2}} = s_{\mathcal{D}} \circ s_{(MN)}$  et  $r_{M,\frac{\pi}{2}} = s_{(MN)} \circ s_{\mathcal{D}'}$ . Par quel(s) point(s) passe(nt) nécessairement  $\mathcal{D}$  ?  $\mathcal{D}'$  ?
- c) Montrer que le triangle  $MIN$  est rectangle en  $I$  et isocèle.

