UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Algèbre et Géométrie 1

Feuille d'exercices d'algèbre n°3

Produit scalaire et espaces euclidiens

Révisions

1) Rappeler ce qu'est un ***produit scalaire***. Qu'appelle-t-on ***espace euclidien ?***

2) Énoncer et démontrer l'***inégalité de Cauchy-Schwarz***. Traiter le cas d'égalité.
En déduire que l'application $x \longmapsto \|x\| = \sqrt{<x,\, x>}$ est une norme.

3) Rappeler la ***formule de polarisation*** (lien avec la norme) et l'***identité du parallélogramme***.

4) Soit E un espace euclidien.
• Donner la définition de l'***orthogonal*** (noté $A^{\perp}$) d'une partie A de E. Montrer que $A^{\perp}$ est toujours un sous-espace vectoriel de E.
Démontrer qu'un sous-espace vectoriel et son orthogonal sont toujours supplémentaires dans E.
• Quand dit-on qu'une famille $(e_1, \cdots, e_k)$ de vecteurs de E est ***orthogonale*** (resp. ***orthonormée***) ? Montrer que toute famille orthogonale de vecteurs non nuls de E est libre.

Exercice n°1

Pour quelles valeurs $\lambda \in \mathbb{R}$ les formes bilinéaires sur $\mathbb{R}^3$ ci-dessous définissent-elles un produit scalaire ?

1) $a(x, y) = x_1y_1 + 6x_2y_2 + 3x_3y_3 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 3\lambda x_1y_3 + 3\lambda x_3y_1$

2) $b(x, y) = 2x_1y_1 + 7x_1y_2 + 7x_2y_1 + 6x_2y_2 - 3x_3y_3 + \lambda x_2y_3 + \lambda x_3y_2$

Exercice n°2

(CAPES 2011 - Première composition)

Pour tous P et Q appartenant à $\mathbb{R}[X]$, on pose : $\varphi(P, Q) = <P,\, Q> = \displaystyle\int_0^{+\infty} P(x)Q(x)e^{-x}dx$.

1) Montrer que l'application φ est bien définie.

2) Montrer que φ est un produit scalaire.

Exercice n°3

Soit $(e_1, \dots, e_p)$ une famille de p vecteurs unitaires d'un espace euclidien $(E, <,>)$ de dimension n. Le but de cet exercice est de montrer que $(e_1, \dots, e_p)$ est une base orthonormée de E si et seulement si, pour tout $x \in E$, $\|x\|^2 = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} <x, e_i>^2$.

1) Montrer que toute base orthonormée $(e_1, \dots, e_p)$ de E vérifie bien cette propriété.

2) Montrer que si la famille $(e_1, \dots, e_p)$ vérifie cette propriété, elle est orthonormée.

3) Montrer que si la famille $(e_1, \dots, e_p)$ vérifie cette propriété, elle engendre E (on pourra poser $y = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} < x, e_i > e_i$ et calculer $||x - y||^2$).

$\boxed{\textbf{Exercice n°4}}$

Soit f une forme linéaire d'un espace euclidien E. Montrer que :

$$\exists u \in E \quad \forall x \in E \quad f(x) = <x,\, u>$$

$\boxed{\textbf{Exercice n°5}}$

Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$ muni de sa structure euclidienne canonique, c'est à dire que $(1, X, X^2, X^3)$ est une base orthonormale de E.

1) Déterminer une base orthonormale de l'hyperplan $H = \{P \in E \mid P(1) = 0\}$.

2) Généraliser à $\mathbb{R}_n[X]$.

3) En déduire la projection orthogonale de X sur H et sa distance à H.

$\boxed{\textbf{Exercice n°6}}$

Soient E un espace euclidien de dimension n sur $\mathbb{R}$, F un s.e.v. de dimension p et $x \in E$. Montrer l'existence et l'unicité de $y \in F$ tel que $\| \, x - y \, \|$ soit minimum. Dans une base convenablement choisie, exprimer y en fonction de x. Traduire le résultat en termes de distance.
Application : Trouver a et b tel que $\displaystyle\int_0^1 (\ell n\, x - ax - b)^2 dx$ soit minimum. Calculer ce minimum.

$\boxed{\textbf{Exercice n°7}}$ (Méthodes des moindres carrés)
Deux valeurs physiques sont liées par une relation $y = ax + b$. On veut trouver a et b. On fait n expériences de résultats $(x_i, y_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$. Montrer qu'on peut trouver $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} (y_i - ax_i - b)^2$ soit minimum. Déterminer a et b.

$\boxed{\textbf{Exercice n°8}}$ (Polynômes de *Legendre*).
Soit $E = \mathbb{R}[X]$ muni du produit scalaire $\varphi : E^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $(f, g) \longmapsto \displaystyle\int_{-1}^{1} f(t)g(t)dt$.

1) Pour $n \geqslant 1$, on pose $P_n = (X^2 - 1)^n$ et $Q_n = \dfrac{d^n}{dX^n}(P_n)$.

a) Quels sont le degré et le coefficient dominant de Q_n ? Montrer que : $\forall\, 0 \leqslant p \leqslant n - 1$, $\varphi(X^p, Q_n) = 0$.

b) Montrer que les polynômes $L_n = \dfrac{1}{2^n . n!} Q_n$ forment une base orthogonale de E.

2) Soit $s : E \longrightarrow E$, $P \longmapsto s(P) = Q$ où $Q(X) = P(-X)$. Montrer que s est une symétrie orthogonale.

$\boxed{\textbf{Exercice n°9}}$

Soit E un espace euclidien. Soit p un endomorphisme de E tel que $p \ o \ p = p$. Montrer que p est un projecteur orthogonal si et seulement si p est ***symétrique*** (c'est à dire $\forall (x, y) \in E^2 \quad < p(x),\, y > = < x,\, p(y) >$). Comment cela se traduit-il matriciellement ?

$\boxed{\textbf{Exercice n°10}}$

Soit E un espace euclidien. Soit s un endomorphisme de E, distinct de $\pm id_E$, tel que $s \ o \ s = id_E$. Montrer que s est une symétrie orthogonale si et seulement si s est symétrique. Comment cela se traduit-il matriciellement ?
Montrer que si s est une symétrie orthogonale alors s conserve le produit scalaire (on dit alors que s est un ***endomorphisme orthogonal*** de E) : $\forall (x, y) \in E^2 \quad < s(x),\, s(y) > = < x,\, y >$.

Exercice n°11

Soit f un endomorphisme orthogonal d'un espace euclidien.

1) Comment cela se traduit-il matriciellement ? Montrer que f est bijectif et que $\det f = \pm 1$.

2) Montrer que $Ker(f - Id) = Im(f - Id)^{\perp}$. En déduire que si $(f - Id)^2 = 0$, alors $f = Id$.

Exercice n°12

On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$M = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -2 & -1 & -2 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

1) Calculer M^2. Que peut-on dire des valeurs propres de M ? La matrice M est-elle diagonalisable ?

2) Montrer que les sous-espaces propres sont orthogonaux puis caractériser géomètriquement f. On précisera les points, droites ou plans définissant la transformation.

Exercice n°13

On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire standard.

1) Caractériser géométriquement les endomorphismes de matrices :

$$A = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 8 & -1 & -4 \\ -1 & 8 & -4 \\ -4 & -4 & -7 \end{pmatrix} \quad C = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

On pourra d'abord calculer A^2, B^2 et C^2.

2) Trouver les matrices, dans la base canonique, de :

a) la projection orthogonale sur le plan d'équation $x - 3y + z = 0$.

b) la symétrie orthogonale par rapport au plan d'équation $2x + 2y - z = 0$.