UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Algèbre et Géométrie 1

Feuille d'exercices d'algèbre n°1

Espaces vectoriels de dimension finie

Révisions

1) Comment introduit-on les vecteurs en classe de seconde ?

2) Rappeler les définitions d'un ***espace-vectoriel*** et d'un ***sous-espace vectoriel***. Donner des exemples.

3) Qu'appelle-t-on ***sous-espace vectoriel engendré*** par une partie ?
Comment définit-on la somme de deux s.e.v. ? Quand dit-on que deux sous-espaces sont en ***somme directe*** ? Qu'ils sont ***supplémentaires*** ?

4) Qu'est-ce qu'une ***famille libre*** ? Une ***famille génératrice*** ? Une ***base*** ? Donner des exemples.
Comment caractérise-t-on le fait que deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires ?

5) Quand dit-on qu'un espace vectoriel est de ***dimension finie*** ?
Qu'est-ce que le ***rang*** d'une famille de vecteurs ?
Rappeler le théorème de la base incomplète.

Exercice n°1

Les sous-ensembles E et F suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$? Si oui, en donner une base.

$$E = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4,\ 3x + 2y + t = 0\}, \qquad F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4,\ xy = 0\}.$$

Exercice n°2

Dans $\mathbb{R}^3$, montrer que les vecteurs $a_1 = (1, 2, 3)$ et $a_2 = (2, -1, 1)$ engendrent le même sous-espace vectoriel que $b_1 = (1, 0, 1)$ et $b_2 = (0, 1, 1)$:

1) en écrivant b_1 et b_2 comme combinaisons linéaires de a_1 et de a_2.

2) en donnant une équation qui caractérise le sous-espace vectoriel engendré par a_1 et a_2.

Exercice n°3

Dans $\mathbb{E} = \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$ montrer que $(\exp, x \mapsto xe^x, x \mapsto \ln x)$ est une famille libre.

Exercice n°4

Soient F et G deux sous-espaces d'un espace vectoriel $\mathbb{E}$.

1) Montrer que $F \cup G$ est un sous-espace de $\mathbb{E}$ si et seulement si $F \subset G$ ou $G \subset F$.

2) En déduire que si $F \neq E$ et $G \neq E$, alors $F \cup G \neq E$.

Exercice n°5 *(CAPES 1998)*

Soient ABC un triangle non aplati et M un point du plan affine. Montrer que si λ, μ et ν ne sont pas tous nuls et vérifient $\lambda\overrightarrow{MA} + \mu\overrightarrow{MB} + \nu\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{0}$ alors on a $\lambda + \mu + \nu \neq 0$.

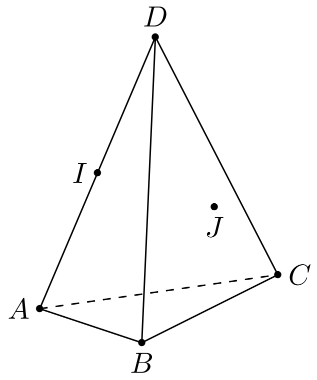
Exercice n°6 *(Épreuve sur dossier 2016)*

Dans un tétraèdre $ABCD$, I, J et K sont respectivement les milieux de $[AB]$, $[BD]$ et $[BC]$.
Les points E et F sont définis par $\overrightarrow{AE} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AJ}$ et $\overrightarrow{CF} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{CJ}$. Démontrer que I, E, F et K sont coplanaires.

Exercice n°7 *(Épreuve sur dossier 2016)*

L'espace est rapporté à un repère $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$. Dans ce repère, on définit les quatre points $A(1; 2; 3)$, $B(2; -1; 0)$, $C(0; -3; 1)$ et $D(-1; 0; 2)$. Les droites (AB) et (CD) sont-elles sécantes ?

Exercice n°8 *(Épreuve sur dossier 2018)*



$ABCD$ est un tétraèdre.
I est le milieu du segment $[AD]$.
J est le point de la face BCD défini par : $\overrightarrow{BJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BD}$.

1) On se place dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$.
Déterminer les coordonnées du point K, intersection de la droite (IJ) et du plan (ABC).

2) Sans utiliser de repère, donner une construction du point K.

Exercice n°9

$\mathbb{E}$ est un $\mathbb{K}-$espace vectoriel, F, G, H sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{E}$.
Dire (démonstration à l'appui) si chacun des énoncés suivants est vrai ou faux (faire des dessins).

1) Le complémentaire d'un hyperplan est une droite.

2) Si $F \cap G = G \cap H = H \cap F = \{0\}$ alors $\dim\ (F + G + H) = \dim F + \dim G + \dim H$.

3) Si H et K sont deux hyperplans de $\mathbb{E}$ alors $H \cup K \neq \mathbb{E}$.

4) Si P_1 et P_2 sont deux plans de $\mathbb{E}$, vérifiant $P_1 \cap P_2 = \{0\}$ alors $\dim \mathbb{E} \geqslant 4$.

Applications linéaires

Révisions

1) Rappeler la définition d'une ***application linéaire*** entre deux espaces vectoriels E et F. Qu'est-ce qu'un ***endomorphisme*** ?

2) Rappeler les définitions des exemples classiques (homothéties, projections, symétries). Illustrer graphiquement.

3) Rappeler les définitions du ***noyau*** $\operatorname{Ker} f$ et de l'***image*** $\operatorname{Im} f$ d'un endomorphisme f.
Énoncer le théorème du rang.

4) Qu'appelle-t-on ***valeur propre*** et ***sous-espace propre*** associé d'un endomorphisme ? Donner des exemples.

5) Soient E et F deux espaces vectoriels de dimensions finies munis respectivement des bases $\mathscr{B} = (e_1, e_2, \cdots, e_p)$ et $\mathscr{C} = (f_1, \cdots, f_n)$. Rappeler la définition de la ***matrice*** de l'application linéaire $f : E \to F$ relativement aux bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$. Quels sont les effets de changements de bases ?

Exercice n°10

Soit $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $(x_1, x_2, x_3) \longmapsto (x_1 - 2x_2 - 3x_3, x_1 - 2x_2 - 3x_3, -x_1 + 2x_2 + 3x_3)$.
Montrer que f est linéaire et déterminer $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$. A-t-on $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} f$? $\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Im} f$?

Exercice n°11

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$ tel que $a \neq 0$. On note $\mathscr{E}(a, b, c)$ l'ensemble des suites complexes $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = 0$$

1) Montrer que $\mathscr{E}(a, b, c)$ est un espace vectoriel.

2) Montrer pour tout x et tout y de $\mathbb{C}$, il existe un unique élément $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathscr{E}(a, b, c)$ tel que $u_0 = x$ et $u_1 = y$. On note $F(x, y)$ cet élément.

3) Montrer que que l'application $F : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathscr{E}(a, b, c)$, $(x, y) \longmapsto F(x, y)$ est un isomorphisme de $\mathbb{C}^2$ sur $\mathscr{E}(a, b, c)$. En déduire la dimension de l'espace vectoriel $\mathscr{E}(a, b, c)$.

4) Soit $r \in \mathbb{C}^*$. Montrer que la suite $(r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un élément de $\mathscr{E}(a,b,c)$ si et seulement si r est solution de *l'équation caractéristique* (C) : $ax^2 + bx + c = 0$.

a) On suppose que l'équation (C) admet deux racines distinctes r_1 et r_2 dans $\mathbb{C}$. Montrer que les deux suites $(r_1^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(r_2^n)_{n\in\mathbb{N}}$ forment une base de $\mathscr{E}(a,b,c)$.

b) On suppose que l'équation (C) admet une racine double r non nulle. Montrer que les deux suites $(r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(nr^n)_{n\in\mathbb{N}}$ forment une base de $\mathscr{E}(a,b,c)$.

5) On considère la suite de Fibonacci $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = 0 \quad u_1 = 1 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$$

Pour tout entier naturel n, expliciter u_n en fonction de n.

Exercice n°12 *(CAPES 2016 - Première composition)*

Pour tout naturel n, $\mathbb{R}_n[X]$ désigne l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n.
Soit n un entier supérieur ou égal à 2 et soient $a_1, \cdots, a_n$ des réels deux à deux distincts.
Pour tout entier $k \in [\![1,n]\!]$, on considère le polynôme

$$L_k(X) = \prod_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ i\neq k}} \frac{X - a_i}{a_k - a_i}.$$

On considère l'application F : $\left\{ \begin{array}{lcl} \mathbb{R}_{n-1}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ P & \longmapsto & (P(a_1), \cdots, P(a_n)). \end{array} \right.$

1) Montrer que F est une application linéaire.

2) Soit $(e_1, \cdots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Pour $k \in [\![1,n]\!]$, montrer qu'il existe un polynôme P dans $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que $F(P) = e_k$.

3) Montrer que F est surjective, puis justifier que F est bijective.

Exercice n°13

Soient E un espace vectoriel de dimension 4, $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ une base de E, F un espace vectoriel de dimension 5, $\{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5\}$ une base de F.
Lorsque cela est possible, comment construire une application linéaire u de E dans F qui vérifie la condition :

1) Im $u = \text{vect}(f_1, f_2, f_3)$

2) Im $u = \text{vect}(f_4)$

3) Im $u = F$

4) Ker $u = \text{vect}(e_3)$

5) Ker $u = \text{vect}(e_1, e_3)$ et Im $u = \text{vect}(f_1, f_2)$

6) Ker $u = \text{vect}(e_3, e_4)$ et Im $u = \text{vect}(f_1, f_2, f_3)$

Exercice n°14

Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des fonctions polynômiales à coefficients réels de degré au plus n ($n \in \mathbb{N}^*$).
Soit $\Phi : E \longrightarrow E$, $P \longmapsto \Phi(P)$ où $\Phi(P) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \dfrac{P(x) + P(-x)}{2}$.

1) Vérifier que Φ est linéaire.

2) Déterminer Ker Φ et Im Φ. Calculer leurs dimensions respectives et en donner des bases. Montrer que $E = \text{Ker } \Phi \oplus \text{Im } \Phi$.

Exercice n°15

Soient E un espace vectoriel et $f : E \to E$ une application linéaire.

1) On suppose que $f^3 = 0$. f est-elle injective ? surjective ?

2) On suppose que $f^3 + 2f^2 - Id = 0$. Montrer que f est inversible et déterminer son inverse.

Exercice n°16

Un endomorphisme $f \in \mathscr{L}(E)$ est dit *nilpotent* s'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $f^p = 0$. Dans ce cas, *l'indice* de f est le plus petit entier p tel que $f^p = 0$. On considère $f \in \mathscr{L}(E)$ nilpotent d'indice p.

1) Soit $\overrightarrow{u} \in E \setminus \text{Ker } f^{p-1}$. Montrer que la famille $(\overrightarrow{u}, f(\overrightarrow{u}), \dots, f^{p-1}(\overrightarrow{u}))$ est libre.

2) En déduire que si E est de dimension finie n, alors $f^n = 0$.

Exercice n°17

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\Delta : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}[X]$, $P \mapsto P(X+1) - P(X)$.

1) Montrer que Δ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$. Déterminer Ker Δ.

2) Donner la dimension de Im Δ. Que dire de la famile $\left(\Delta(X^k)\right)_{1 \leqslant k \leqslant n}$? En déduire Im Δ et montrer que pour tout entier $0 \leqslant k \leqslant n-1$, $X^k \in \text{Im } \Delta$.

3) En déduire que pour ces entiers k, il existe un polynôme P_k, dont on peut suposer le terme constant égal à zéro, tel que $X^k = P_k(X+1) - P_k(X)$.

4) Calculer, pour $N \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{j=1}^{N} j^3$.

Exercice n°18

Soient E un espace vectoriel et $f \in \mathscr{L}(E)$. On pose $N_k = \text{Ker } (f^k)$ et $I_k = \text{Im } (f^k)$.

1) Montrer que la suite (N_k) est croissante (pour l'inclusion) et que la suite (I_k) est décroissante.

2) Montrer que s'il existe un p tel que $N_p = N_{p+1}$ alors $N_p = N_{p+r}$ pour tout r de $\mathbb{N}$.

3) On suppose à présent E de dimension finie.

a) Montrer que les suites (N_k) et (I_k) sont stationnaires à partir du même rang p.

b) Montrer que $N_p \oplus I_p = E$.

Exercice n°19

Soit E l'espace vectoriel réel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Soit u l'endomorphisme de E défini par :

$$\forall f \in E,\ \forall x \in \mathbb{R},\ u(f)(x) = f(-x)$$

Déterminer les valeurs propres de u et montrer que E est somme directe des sous-espaces propres associés.

Exercice n°20

On appelle projecteur d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, tout endomorphisme p de E vérifiant $p \circ p = p$.
Montrer que si p est un projecteur de E alors $E = \text{Ker } p \oplus \text{Im } p$ et $\text{Im } p = \text{Ker } (id_E - p)$.

Exercice n°21

Soient E, F, G trois espaces vectoriels de dimensions finies sur le corps $\mathbb{K}$.

1) Soient $u \in \mathscr{L}(E, F)$ et $v \in \mathscr{L}(F, G)$. Montrer que $\text{rg } (v \circ u) \leqslant \min(\text{rg } u, \text{rg } v)$.
En déduire que pour des endomorphismes en dimension finie, si $u \circ v$ est bijectif, alors u et v le sont.

2) Soit $u : \left| \begin{array}{c} \mathbb{K}[X] \to \mathbb{K}[X] \\ P \mapsto XP \end{array} \right.$ Trouver $v \in \mathscr{L}(\mathbb{K}[X])$ tel que $v \circ u = \text{id}_{\mathbb{K}[X]}$. Montrer que ni u, ni v ne sont bijectifs.

Exercice n°22 *(CAPES 2016 - Première composition)*

Montrer que $A = \begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1} \end{pmatrix}$ est la matrice de l'application linéaire F définie dans l'exercice 10 dans des bases bien choisies.