

Algèbre et Géométrie 1

Feuille d'exercices d'algèbre n°1

Espaces vectoriels de dimension finie

Révisions

- 1) Rappeler les définitions d'un *espace-vectoriel* et d'un *sous-espace vectoriel*. Donner des exemples.
- 2) Qu'appelle-t-on *sous-espace vectoriel engendré* par une partie ?
Comment définit-on la somme de deux s.e.v. ? Quand dit-on que deux sous-espaces sont en *somme directe* ? Qu'ils sont *supplémentaires* ?
- 3) Qu'est-ce qu'une *famille libre* ? Une *famille génératrice* ? Une *base* ? Donner des exemples.
Comment caractérise-t-on le fait que deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires ?
- 4) Quand dit-on qu'un espace vectoriel est de *dimension finie* ?
Qu'est-ce que le *rang* d'une famille de vecteurs ?
Rappeler le théorème de la base incomplète.

Exercice n°1

Les sous-ensembles E et F suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^4 ? Si oui, en donner une base.

$$E = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, 3x + 2y + t = 0\}, \quad F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, xy = 0\}.$$

Exercice n°2

Dans \mathbb{R}^3 , montrer que les vecteurs $a_1 = (1, 2, 3)$ et $a_2 = (2, -1, 1)$ engendrent le même sous-espace vectoriel que $b_1 = (1, 0, 1)$ et $b_2 = (0, 1, 1)$:

- 1) en écrivant b_1 et b_2 comme combinaisons linéaires de a_1 et de a_2 .
- 2) en donnant une équation qui caractérise le sous-espace vectoriel engendré par a_1 et a_2 .

Exercice n°3

Dans $\mathbb{E} = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$ montrer que $(\exp, x \mapsto xe^x, x \mapsto \ln x)$ est une famille libre.

Exercice n°4

Soient F et G deux sous-espaces d'un espace vectoriel \mathbb{E} .

- 1) Montrer que $F \cup G$ est un sous-espace de \mathbb{E} si et seulement si $F \subset G$ ou $G \subset F$.
- 2) En déduire que si $F \neq E$ et $G \neq E$, alors $F \cup G \neq E$.

Exercice n°5 (CAPES 1998)

Soient ABC un triangle non aplati et M un point du plan affine. Montrer que si λ, μ et ν ne sont pas tous nuls et vérifient $\lambda\overrightarrow{MA} + \mu\overrightarrow{MB} + \nu\overrightarrow{MC} = \vec{0}$ alors on a $\lambda + \mu + \nu \neq 0$.

Exercice n°6 (Épreuve sur dossier 2016)

Dans un tétraèdre $ABCD$, I, J et K sont respectivement les milieux de $[AB]$, $[BD]$ et $[BC]$.

Les points E et F sont définis par $\overrightarrow{AE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AJ}$ et $\overrightarrow{CF} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CJ}$.

Démontrer que les points I, E, F et K sont coplanaires.

Exercice n°7 (*Épreuve sur dossier 2016*)

L'espace est rapporté à un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Dans ce repère, on définit les quatre points $A(1; 2; 3)$, $B(2; -1; 0)$, $C(0; -3; 1)$ et $D(-1; 0; 2)$. Les droites (AB) et (CD) sont-elles sécantes ?

Exercice n°8

\mathbb{E} est un \mathbb{K} -espace vectoriel, F, G, H sont des sous-espaces vectoriels de \mathbb{E} .

Dire (preuve à l'appui) si chacun des énoncés suivants est vrai ou faux (faire des dessins).

- 1) Le complémentaire d'un hyperplan est une droite.
- 2) Si $F \cap G = G \cap H = H \cap F = \{0\}$ alors $\dim(F + G + H) = \dim F + \dim G + \dim H$.
- 3) Si H et K sont deux hyperplans de \mathbb{E} alors $H \cup K \neq \mathbb{E}$.
- 4) Si P_1 et P_2 sont deux plans de \mathbb{E} , vérifiant $P_1 \cap P_2 = \{0\}$ alors $\dim \mathbb{E} \geq 4$.

Applications linéaires

Révisions

- 1) Rappeler la définition d'une **application linéaire** entre deux espaces vectoriels E et F . Qu'est-ce qu'un **endomorphisme** ?
- 2) Rappeler les définitions des exemples classiques (homothéties, projections, symétries). Illustrer graphiquement.
- 3) Rappeler les définitions du **noyau** $\text{Ker } f$ et de l'**image** $\text{Im } f$ d'un endomorphisme f . Énoncer le théorème du rang.
- 4) Qu'appelle-t-on **valeur propre** et **sous-espace propre** associé d'un endomorphisme ? Donner des exemples.
- 5) Soient E et F deux espaces vectoriels de dimensions finies munis respectivement des bases $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_p)$ et $\mathcal{C} = (f_1, \dots, f_n)$. Rappeler la définition de la **matrice** de l'application linéaire $f : E \rightarrow F$ relativement aux bases \mathcal{B} et \mathcal{C} . Quels sont les effets de changements de bases ?

Exercice n°9

Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $(x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1 - 2x_2 - 3x_3, x_1 - 2x_2 - 3x_3, -x_1 + 2x_2 + 3x_3)$.

- 1) Montrer que f est linéaire.
- 2) Déterminer $\text{Ker } f$ et $\text{Im } f$. A-t-on $\text{Im } f \subset \text{Ker } f$? $\text{Ker } f \subset \text{Im } f$?

Exercice n°10 (*CAPES 2016 - Première composition*)

Pour tout naturel n , $\mathbb{R}_n[X]$ désigne l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n .

Soit n un entier supérieur ou égal à 2 et soient a_1, \dots, a_n des réels deux à deux distincts.

Pour tout entier $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on considère le polynôme

$$L_k(X) = \prod_{\substack{1 \leq i \leq n \\ i \neq k}} \frac{X - a_i}{a_k - a_i}.$$

On considère l'application $F : \begin{cases} \mathbb{R}_{n-1}[X] & \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ P & \longmapsto (P(a_1), \dots, P(a_n)). \end{cases}$

- 1) Montrer que F est une application linéaire.
- 2) Soit (e_1, \dots, e_n) la base canonique de \mathbb{R}^n . Pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, montrer qu'il existe un polynôme P dans $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que $F(P) = e_k$.
- 3) Montrer que F est surjective, puis justifier que F est bijective.

Exercice n°11

Soient E un espace vectoriel de dimension 4, $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ une base de E , F un espace vectoriel de dimension 5, $\{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5\}$ une base de F .

Lorsque cela est possible, comment construire une application linéaire u de E dans F qui vérifie la condition :

- | | |
|--|---|
| 1) $\text{Im } u = \text{vect}(f_1, f_2, f_3)$ | 2) $\text{Im } u = \text{vect}(f_4)$ |
| 3) $\text{Im } u = F$ | 4) $\text{Ker } u = \text{vect}(e_3)$ |
| 5) $\text{Ker } u = \text{vect}(e_1, e_3)$ et $\text{Im } u = \text{vect}(f_1, f_2)$ | 6) $\text{Ker } u = \text{vect}(e_3, e_4)$ et $\text{Im } u = \text{vect}(f_1, f_2, f_3)$ |

Exercice n°12 (*CAPES 2014 - Première composition*)

Soit E l'équation différentielle définie sur un intervalle I : $y''(t) + a(t)y'(t) + b(t)y(t) = c(t)$ où a, b et c sont des applications continues de I dans \mathbb{R} et y une application de $C^2(I, \mathbb{R})$, ensemble des fonctions de classe C^2 de I dans \mathbb{R} .

- Démontrer que l'ensemble $\text{Sol}(EH)$ des solutions de l'équation homogène associée est un sous-espace vectoriel de $C^2(I, \mathbb{R})$.
- Soit t_0 un réel de l'intervalle I . On considère l'application φ_{t_0} , de $\text{Sol}(EH)$ dans \mathbb{R}^2 définie par :
 $\forall y \in \text{Sol}(EH), \varphi_{t_0}(y) = \begin{pmatrix} y(t_0) \\ y'(t_0) \end{pmatrix}$. Démontrer que φ_{t_0} est un isomorphisme d'espaces vectoriels.
- En déduire que $\text{Sol}(EH)$ est un sous espace vectoriel de $C^2(I, \mathbb{R})$ de dimension 2.

Exercice n°13

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n . Soit u un endomorphisme de E non nul. Montrer que

$$\text{Im } u = \text{Ker } u \iff (\dim E = 2 \text{rg } u \text{ et } u^2 = 0)$$

Exercice n°14

Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des fonctions polynômiales à coefficients réels de degré au plus n ($n \in \mathbb{N}^*$).

Soit $\Phi : E \rightarrow E, P \mapsto \Phi(P)$ où $\Phi(P) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{P(x) + P(-x)}{2}$.

- Vérifier que Φ est linéaire.
- Déterminer $\text{Ker } \Phi$ et $\text{Im } \Phi$. Calculer leurs dimensions respectives et en donner des bases. Montrer que $E = \text{Ker } \Phi \oplus \text{Im } \Phi$.

Exercice n°15

Soient E un espace vectoriel et $f : E \rightarrow E$ une application linéaire.

- On suppose que $f^3 = 0$. f est-elle injective ? surjective ?
- On suppose que $f^3 + 2f^2 - Id = 0$. Montrer que f est inversible et déterminer son inverse.

Exercice n°16

Un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ est dit *nilpotent* s'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $f^p = 0$. Dans ce cas, l'*indice* de f est le plus petit entier p tel que $f^p = 0$. On considère $f \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent d'indice p .

- Soit $\vec{u} \in E \setminus \text{Ker } f^{p-1}$. Montrer que la famille $(\vec{u}, f(\vec{u}), \dots, f^{p-1}(\vec{u}))$ est libre.
- En déduire que si E est de dimension finie n , alors $f^n = 0$.
- Soit $g \in \mathcal{GL}(E)$ (E de dimension finie) tel que $f \circ g = g \circ f$. Montrer que $f + g \in \mathcal{GL}(E)$.

Exercice n°17

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\Delta : \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}[X]$, $P \mapsto P(X+1) - P(X)$.

- 1) Montrer que Δ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
- 2) Déterminer $\text{Ker } \Delta$.
- 3) Donner la dimension de $\text{Im } \Delta$. Que dire de la famille $(\Delta(X^k))_{1 \leq k \leq n}$? En déduire $\text{Im } \Delta$ et montrer que pour tout entier $0 \leq k \leq n-1$, $X^k \in \text{Im } \Delta$.
- 4) En déduire que pour ces entiers k , il existe un polynôme P_k , dont on peut supposer le terme constant égal à zéro, tel que $X^k = P_k(X+1) - P_k(X)$.
- 5) Calculer, pour $N \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{j=1}^N j^3$.

Exercice n°18

Soient E un espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$. On pose $N_k = \text{Ker}(f^k)$ et $I_k = \text{Im}(f^k)$.

- 1) Montrer que la suite (N_k) est croissante (pour l'inclusion) et que la suite (I_k) est décroissante.
- 2) Montrer que s'il existe un p tel que $N_p = N_{p+1}$ alors $N_p = N_{p+r}$ pour tout r de \mathbb{N} .
- 3) On suppose à présent E de dimension finie.
 - a) Montrer que les suites (N_k) et (I_k) sont stationnaires à partir du même rang p .
 - b) Montrer que $N_p \oplus I_p = E$.
 - c) Montrer que la suite $(\dim(N_{k+1}) - \dim(N_k))$ est décroissante.

Exercice n°19

Soit E l'espace vectoriel réel des fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . Soit u l'endomorphisme de E défini par :

$$\forall f \in E, \forall x \in \mathbb{R}, u(f)(x) = f(-x)$$

Déterminer les valeurs propres de u et montrer que E est somme directe des sous-espaces propres associés.

Exercice n°20

On appelle projecteur d'un \mathbb{K} -espace vectoriel E , tout endomorphisme p de E vérifiant $p \circ p = p$. Montrer que si p est un projecteur de E alors $E = \text{Ker } p \oplus \text{Im } p$ et $\text{Im } p = \text{Ker}(id_E - p)$.

Exercice n°21

Soient E, F, G trois espaces vectoriels de dimensions finies sur le corps \mathbb{K} .

- 1) Soient $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $v \in \mathcal{L}(F, G)$. Montrer que $\text{rg}(v \circ u) \leq \min(\text{rg } u, \text{rg } v)$.
En déduire que pour des endomorphismes en dimension finie, si $u \circ v$ est bijectif, alors u et v le sont.
- 2) Soit $u : \begin{cases} \mathbb{K}[X] \rightarrow \mathbb{K}[X] \\ P \mapsto XP \end{cases}$ Trouver $v \in \mathcal{L}(\mathbb{K}[X])$ tel que $v \circ u = id_{\mathbb{K}[X]}$. Montrer que ni u , ni v ne sont bijectifs.

Exercice n°22 (*CAPES 2016 - Première composition*)

Montrer que $A = \begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1} \end{pmatrix}$ est la matrice de l'application linéaire F définie dans l'exercice 10 dans des bases bien choisies.