Intégrales Impropres

1. Généralités

(1.1) Définitions.

• Soient $-\infty < a < b \leq +\infty$ et $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ continue. Pour tout $c \in [a, b[$, la fonction f est continue sur $[a, c]$ et est donc intégrable (au sens de Riemann) sur $[a, c]$; l'intégrale de f sur $[a, c]$ est notée $\int_a^c f(t)\,dt$.

On dit que l'intégrale $\int_a^b f(t)\,dt$ **existe**, ou **est convergente**, si $\displaystyle\lim_{c \to b_-} \int_a^c f(t)\,dt$ existe et dans ce cas

$$\int_a^b f(t)\,dt = \lim_{c \to b_-} \int_a^c f(t)\,dt.$$

• Soient $-\infty \leq a < b < +\infty$ et $f :]a, b] \to \mathbb{R}$ continue. Pour tout $c \in]a, b]$, la fonction f est continue sur $[c, b]$ et est donc intégrable (au sens de Riemann) sur $[c, b]$.

De la même façon, on dit que l'intégrale $\int_a^b f(t)\,dt$ existe, ou est convergente, si $\displaystyle\lim_{c \to a_+} \int_c^b f(t)\,dt$ existe et dans ce cas

$$\int_a^b f(t)\,dt = \lim_{c \to a_+} \int_c^b f(t)\,dt.$$

Nous nous bornons à l'étude de la première situation. Pour la seconde on a des résultats analogues. On observera que pour toute fonction f continue sur $]a, b]$ la fonction $g(x) = f(-x)$ est continue sur $[-b, -a[$ et l'égalité, $\int_c^b f(t)\,dt = \int_{-b}^{-c} f(-t)\,dt$, pour tout $c \in]a, b]$, implique

$$\int_a^b f(x)\,dx \text{ converge si et seulement si } \int_{-b}^{-a} g(x)\,dx \text{ converge.}$$

(1.2) Lemme. *Si f est continue sur $[a, b]$, alors*

$$\lim_{c \to b_-} \int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$$

<u>Démonstration</u>. La fonction f continue sur $[a, b]$ est bornée (et atteint ses bornes) sur $[a, b]$. Des propriétés de l'intégrale, il résulte que :

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^c f(x)\,dx \right| = \left| \int_c^b f(x)\,dx \right| \leq \int_c^b |f(x)|\,dx \leq (b-c) \sup_{t \in [a,b]} |f(t)| \underset{c \to b_-}{\longrightarrow} 0.$$

D'où le résultat. $\blacksquare$

Une conséquence de ce lemme est la suivante. Si la fonction f continue sur $[a, b[$, $-\infty < a < b < +\infty$, est prolongeable par continuité au point b, on dit que l'intégrale $\int_a^b f(x)\,dx$ est une fausse intégrale impropre.

En effet, appelons $\tilde{f}$ le prolongement par continuité de f au segment $[a, b]$. Pour tout $c \in [a, b[$, les fonctions f et $\tilde{f}$ coïncident sur $[a, c]$ et par suite $\int_a^c f(t)\,dt = \int_a^c \tilde{f}(t)\,dt$. Le lemme précédent, nous dit alors que l'intégrale $\int_a^b f(t)\,dt$ existe et est égale à l'intégrale (de Riemann) ordinaire $\int_a^b \tilde{f}(t)\,dt$. C'est le cas par exemple pour la fonction f continue sur $[-1, 0[$ qui à x associe $x\,\ln(|x|)$.

(1.3) Lemme. *Soit $a' \in [a, b[$. L'intégrale $\int_a^b f(t)\,dt$ converge si et seulement si l'intégrale $\int_{a'}^b f(t)\,dt$ converge.* L'abus de langage "$\int^b f(t)\,dt$ converge" est souvent utilisé.

Démonstration. Avec les propriétés de l'intégrale, pour tout $c \in [a, b[$, nous avons :

$$\int_{a'}^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx - \int_a^{a'} f(t)\,dt.$$

Ce qui montre que $\lim\limits_{c \to b_-} \int_{a'}^c f(t)\,dt$ existe si et seulement si $\lim\limits_{c \to b_-} \int_a^c f(t)\,dt$ existe. $\blacksquare$

• Exemples fondamentaux

(1.4) Théorème.

Intégrales de Riemann. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\textit{Pour tout} \quad -\infty < a < b < +\infty, \quad \int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha} \ \textit{converge si et seulement si}\ \alpha < 1.$$

$$\textit{Pour tout}\ \ a > 0, \quad \int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} \ \textit{converge si et seulement si}\ \alpha > 1.$$

Intégrales de Bertrand. Soient α et β deux nombres réels.

$$\textit{Pour tout}\ \ a > 0, \quad \int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha (\ln x)^\beta} \ \textit{converge si et seulement si}\ \alpha > 1 \ \textit{ou}\ (\alpha = 1 \ \textit{et}\ \beta > 1).$$

Démonstration. Exercice.

(1.5) Exercice. Montrer que $\int_0^{+\infty} e^{-t}\,dt$ existe.

2. Critères de convergence pour une fonction f à valeurs positives

Lorsque f est positive, la fonction F définie par $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ est croissante sur $[a,b[$.

– Si F est majorée sur $[a,b[$, alors la limite $\lim\limits_{x\to b_-} F(x)$ est réelle et égale au plus petit majorant $\sup\{F(t) : t \in [a,b[\}$ de F sur $[a,b[$. L'intégrale $\int_a^b f(x)\,dx$ est donc convergente.

– Si F n'est pas bornée sur $[a,b[$, $\lim\limits_{x\to b_-} F(x) = +\infty$. L'intégrale $\int_a^b f(x)\,dx$ est divergente et on convient que sa valeur est $+\infty$.

On en déduit alors le résultat suivant.

(2.1) Critère de comparaison. *Soient f,g deux fonctions continues positives sur l'intervalle $[a,b[$ vérifiant $\forall x \in [a,b[,\ f(x) \le g(x)$. Alors : la convergence de $\int_a^b g(x)\,dx$ entraîne celle de $\int_a^b f(x)\,dx$ et la divergence de $\int_a^b f(x)\,dx$ entraîne celle de $\int_a^b g(x)\,dx$.*

On dit que les fonctions f et g sont équivalentes au voisinage de b si,

$$\forall x \in [a,b[,\ f(x) = g(x)\ (1+\varepsilon(x))\ ;$$

pour une fonction $\varepsilon : [a,b[\to I\!R$ telle que $\lim\limits_{x\to b_-} \varepsilon(x) = 0$. On notera au passage que, lorsque g ne s'annule pas, cette condition (plus générale) est équivalente à $\lim\limits_{x\to b_-} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$. Une conséquence du critère de comparaison est la suivante :

(2.2) Lemme . *Soient f,g deux fonctions continues positives sur l'intervalle $[a,b[$, equivalentes au voisinage de b. Alors les intégrales (de Riemann) impropres $\int_a^b f(x)\,dx$ et $\int_a^b g(x)\,dx$ sont de même nature.*

3. Critère de convergence pour une fonction f à valeurs réelles

(3.1) Définition. Soit f une fonction continue sur $[a,b[$. On dit que l'intégrale $\int_a^b f(x)\,dx$ est absolument convergente si l'intégrale $\int_a^b |f(x)|\,dx$ est convergente.

(3.2) Théorème. *Soit f une fonction continue sur $[a,b[$. Si l'intégrale $\int_a^b f(x)\,dx$ est absolument convergente alors elle est convergente.*

(3.3) Définition. Soit f une fonction continue sur $[a,b[$. Lorsque l'intégrale $\int_a^b f(x)\,dx$ est convergente et non absolument convergente, on dit qu'elle est **semi-convergente**.

(3.4) Exemples. Pour tout $\alpha > 0$, on considère les intégrales :

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha}\,dx \quad \text{et} \quad \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^\alpha}\,dx.$$

Ces intégrales sont absolument convergente si $\alpha > 1$ et semi-convergentes si $0 < \alpha \leq 1$.

Démonstration. Pour $\alpha > 1$, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ est convergente. L'absolue convergence des intégrales considérées résulte alors des inégalités

$$\left|\frac{\sin x}{x^\alpha}\right| \leq \frac{1}{x^\alpha} \quad \text{et} \quad \left|\frac{\cos x}{x^\alpha}\right| \leq \frac{1}{x^\alpha}.$$

Nous supposons à présent que $0 < \alpha \leq 1$. Nous montrons le résultat pour la première intégrale ; la seconde s'obtenant de façon analogue.

Pour tout $a > 1$, une intégration partie nous donne :

$$\begin{aligned}
\int_1^a x^{-\alpha} \ \sin x \ dx &= \Big[x^{-\alpha} \ (-\cos x)\Big]_1^a \ - \ \int_1^a \big(- \alpha \, x^{-\alpha-1}\big) \ (-\cos x) \ dx \\
&= \cos 1 - \frac{\cos a}{a^\alpha} - \alpha \int_1^a \frac{\cos x}{x^{\alpha+1}} \ dx \\
&\underset{a \to +\infty}{\longrightarrow} \cos 1 - \alpha \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^{\alpha+1}} \ dx \ ;
\end{aligned}$$

car l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^{\alpha+1}} \ dx$ est absolument convergente. D'où la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha} \ dx$.

D'autre part, nous avons :

$$\begin{aligned}
\int_1^a \frac{|\sin x|}{x^\alpha} \ dx \geq \int_1^a \frac{\sin^2 x}{x^\alpha} \ dx &= \int_1^a \frac{1 - \cos 2x}{2x^\alpha} \ dx \\
&\geq \frac{1}{2} \int_1^a \frac{dx}{x^\alpha} - \int_1^a \frac{\cos 2x}{2x^\alpha} \ dx \\
&\geq \frac{1}{2} \int_1^a \frac{dx}{x^\alpha} - \frac{1}{2^{2-\alpha}} \int_2^{2a} \frac{\cos u}{u^\alpha} \ du.
\end{aligned}$$

L'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\cos u}{u^\alpha} \ du$ est convergente. L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ est divergente. Il s'ensuit que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x^\alpha} \ dx = +\infty$. ■

4. Exercices

1. Donner la nature des intégrales suivantes :

$$a) \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\, dx \qquad b) \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}\,\sin(1/x)}{\ln(1+x)}\, dx \qquad c) \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}-1}{x}\, dx.$$

2. Convergence et calcul de :

$$a) \int_0^1 \frac{\ln(1+t^2)}{t^2}\, dt \qquad b) \int_0^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right) dt \qquad c) \int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t^\alpha}\, dt \quad (\alpha \in \mathbb{R}).$$

3. **Extrait première épreuve CAPES 1988**.

I) $a)$ Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1-e^{-t}}{t} & \text{si} \quad t \neq 0 \\ 1 & \text{si} \quad t = 0 \end{cases}.$$

Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

$b)$ Étudier la convergence des intégrales $S(x) = \int_0^x \frac{1-e^{-t}}{t}\, dt$ et $R(x) = \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\, dt$ et prouver que S et R sont de classe C^1 respectivement sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{R}_+^*$.

$c)$ Prouver que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \int_0^1 \frac{1-(1-v)^n}{v}\, dv.$$

On pourra calculer la somme $1 + (1-v) + \cdots + (1-v)^{n-1}$.

$d)$ En déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n = \int_0^1 \frac{1-e_n(t)}{t}\, dt - \int_1^n \frac{e_n(t)}{t}\, dt \ ;$$

où e_n est la fonction définie sur $[0,n]$ par la relation $e_n(t) = \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n$.

$e)$ Établir que, pour tout $v \in \mathbb{R}$, $1 + v \leq e^v$.

$f)$ Établir que, pour tout entier $n > 0$ et tout nombre réel t tel que $0 \leq t \leq n$,

$$\left(1 - \frac{t^2}{n^2}\right)^n e^{-t} \leq e_n(t) \leq e^{-t}.$$

(On pourra appliquer l'inégalité précédente en prenant $v = t/n$ puis $v = -t/n$).

En déduire que dans les mêmes conditions, on a $0 \leq e^{-t} - e_n(t) \leq \frac{t^2}{n}\, e^{-t}$.

g) Montrer finalement que $\gamma = \lim_{n \to +\infty} \Big(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln(n) \Big) = S(1) - R(1)$.

II) a) Montrer que pour tout réel $x > 0$ l'intégrale $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t}\, t^{x-1}\, dt$ est convergente.

b) Pour tout entier $n \geq 1$, on note Γ_n la fonction dfinie sur $]0, +\infty[$ par la relation

$$\Gamma - n(x) = \int_{1/n}^{n} e^{-t} t^{x-1}\, dt.$$

Prouver que Γ_n est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$.

c) Montrer que Γ_n converge vers Γ uniformment sur tout intervalle compact $[a, b]$ contenu dans $]0, +\infty[$.

d) Pour tout nombre rel $x > 0$, on pose

$$F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t}\, t^{x-1} = \ln t\; dt.$$

établir la convergence de cette intgrale. Prouver que Γ est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ et que $\Gamma' = F$.