Préparation au CAPES de mathématiques

Feuille d'exercices de géométrie

Géométrie affine

Exercice n°1

1) Montrer qu'une partie non vide Γ d'un espace affine réel X est un sous-espace affine si et seulement si tout barycentre de points de Γ est encore un point de Γ.

2) Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux espaces affines réels de dimensions finies et $f : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$.
Montrer que f est affine si et seulement si f conserve les barycentres.

Exercice n°2 (D'après la $2^{\text{ème}}$ épreuve de 1988)

$A_1, A_2, \cdots, A_n$ étant n points du plan ($n \geq 3$), on dit que $P = (A_1, A_2, \cdots, A_n)$ est une configuration.
On désigne par d l'opérateur de *décalage* qui à toute configuration $P = (A_1, A_2, \cdots, A_n)$ associe la configuration $d(P) = (A_2, A_3, \cdots, A_n, A_1)$ et par m l'opérateur de *passage aux milieux* qui à $P = (A_1, A_2, \cdots, A_n)$ associe $m(P) = (B_1, B_2, \cdots, B_n)$ où, pour tout $k \in \{1, \cdots, n\}$, B_k est le milieu du segment $[A_k, A_{k+1}]$ (en convenant que $A_{n+1} = A_1$).

1) Soient $P = (A_1, A_2, \cdots, A_n)$ une configuration, G l'isobarycentre de P et t une translation du plan. Déterminer l'isobarycentre de $m(P)$. Comparer $m(t[P])$ et $t(m[P])$ et déterminer l'isobarycentre de $m(t[P])$.

2) Soient $P = (A_1, A_2, A_3)$ un triangle et G son isobarycentre. Construire le triangle $m(P) = (B_1, B_2, B_3)$. Prouver que $d[m(P)]$ se déduit de P par une homothétie h de centre G dont on indiquera le rapport λ.

3) En déduire que m induit une bijection sur l'ensemble des triangles. Étant donné un triangle $Q = (B_1, B_2, B_3)$, indiquer une construction géométrique de l'unique triangle $P = (A_1, A_2, A_3)$ tel que $m(P) = Q$.

Exercice n°3

Soit X et Y deux ensembles convexes d'un espace affine $\mathcal{E}$. Démontrer que l'ensemble Z des milieux des segments qui joignent un point de X à un point de Y est convexe.

Exercice n°4 (D'après la $2^{\text{ème}}$ épreuve de 2000)

Étant donnés quatre points non coplanaires A, B, C, D d'un espace affine $\mathcal{E}$ de dimension 3, on appelle *tétraèdre* de sommets A, B, C, D l'enveloppe convexe T de ces quatre points c'est à dire l'intersection de toutes les parties convexes de $\mathcal{E}$ contenant A, B, C, D.

1) Montrer que T n'est autre que l'ensemble des barycentres de ces quatre points affectés de masses positives ou nulles.

2) Un point X de T est dit *extrémal* si pour tous points Y et Z de T on a : $(X \in [YZ] \Longrightarrow X = Y \text{ ou } X = Z)$.
Montrer que les points extrémaux d'un tétraèdre sont ses sommets.
D'une maniére générale, on peut montrer que l'enveloppe convexe d'une partie finie de $\mathcal{E}$ est égale à l'enveloppe convexe de ses points extrémaux.

Exercice n°5

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine et G un sous-groupe fini du groupe affine de $\mathcal{E}$. Montrer qu'il existe un point de $\mathcal{E}$ qui est fixe pour tous les éléments de G.

Exercice n°6 (D'après la 2$^{\text{ème}}$ épreuve de 1996)

Soient A, B, C trois points non alignés d'un plan affine euclidien $\mathcal{P}$. Un point de $\mathcal{P}$ sera repéré par ses coordonnées barycentriques (α, β, γ) relativement aux points A, B, C, normalisées par $\alpha + \beta + \gamma = 1$. Soit M un point intérieur au triangle ABC, c'est-à-dire un point dont les coordonnées barycentriques (α, β, γ) sont strictement positives.

Exprimer la distance de M à la droite (BC) en fonction de $a = BC$, α et l'aire S du triangle. En déduire les coordonnées barycentriques du point I, centre du cercle inscrit dans le triangle ABC.

Exercice n°7 (D'après la 2$^{\text{ème}}$ épreuve de 1985)

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine réel de direction E. On suppose que $E = F \oplus D$ avec D une droite vectorielle. Soit $\mathcal{F}$ un sous-espace affine de $\mathcal{E}$ de direction F, et soit p la projection affine sur $\mathcal{F}$ parallèlement à D. Pour tout réel non nul λ, on définit $a_\lambda(M) = p(M) + \lambda(M - p(M))$ pour tout $M \in \mathcal{E}$.

1) Montrer que a_λ est une application affine de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ (on déterminera en particulier son application linéaire associée). Déterminer l'ensemble de ses points fixes. (a_λ est appelée l'*affinité de direction D, d'hyperplan $\mathcal{F}$ et de rapport k*)

2) On suppose dans cette question que $F = D^\perp$ (on parle alors d'*affinités orthogonales*) et on se restreint aux affinités de rapport différent de 1.

a) Soient a_1 et a_2 des affinités orthogonales d'axes respectifs D_1 et D_2 et de rapports respectifs λ_1 et λ_2. Soit f la composée de a_1 et a_2 notée $f = a_2 a_1$. Déterminer la nature de f lorsque D_1 et D_2 sont parallèles et préciser l'ensemble des points fixes de f. Montrer que D_1 et D_2 sont sécantes si et seulement si f admet un point fixe et un seul.

b) Déterminer toutes les droites stables par une affinité orthogonale a. Prouver que si deux transformations affines f_1 et f_2 commutent (c'est-à-dire sont telles que $f_2 f_1 = f_1 f_2$) l'ensemble des points fixes de f_1 est stable par f_2. Caractériser alors géométriquement les couples (a_1, a_2) d'affinités orthogonales tels que a_1 et a_2 commutent.

Géométrie métrique

Exercice n°8 (D'après la 2$^{\text{ème}}$ épreuve de 1972)

On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ muni des trois distances d_1, d_2, d_3 définies, pour tous les points $x = (x_1, x_2)$ et $y = (y_1, y_2)$, par $d_1(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$, $d_2(x, y) = \mid x_1 - y_1 \mid + \mid x_2 - y_2 \mid$ et $d_3(x, y) = sup\{\mid x_1 - y_1 \mid, \mid x_2 - y_2 \mid\}$. Représenter $\mathcal{C}(O, 1) = \{M,\ d(O, M) = 1\}$ pour chacune des distances d_i.

Même question pour $d_4(x, y) = \displaystyle\int_0^1 |(x_1 - y_1) + t(x_2 - y_2)|\ dt$.

Exercice n°9

On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ muni de la norme ℓ_∞, et de la distance associée d définie pour tous points $x = (x_1, x_2)$ et $y = (y_1, y_2)$ par $d(x, y) = sup\{\mid x_1 - y_1 \mid, \mid x_2 - y_2 \mid\}$. Soient $a = (1, 0)$ et $b = (-1, 0)$. Déterminer et dessiner l'ensemble médiateur des points a et b pour cette distance, pour être convaincu que ce n'est pas une droite (les points $(0, 0), (2, 3)$ et $(1, 2)$ font partie de cet ensemble).

Exercice n°10

On munit $\mathbb{R}$ de la distance discrète d définie par $d(x, y) = 1$ si $x \neq y$ et $d(x, y) = 0$ sinon. Vérifier que d est bien une distance et caractériser les isométries (applications conservant la distance) de $(\mathbb{R}, d)$.

Exercice n°11

Soient a et b deux points d'un espace affine euclidien E. Montrer qu'un point m est dans le segment $[a, b]$ si et seulement si $d(a, b) = d(a, m) + d(m, b)$.
Montrer de même que m est le milieu du segment $[a, b]$ si et seulement si : $d(a, b) = d(a, m) + d(m, b)$ et $d(a, m) = d(m, b)$.

Exercice n°12 (D'après la $2^{\text{ème}}$ épreuve de 1982)
(E, d) désignant un espace métrique et A une partie non vide de E, on appelle *expansion* de (A, d) toute application f de A dans A telle que :

$$\forall M, M' \in A,\ d(M, M') \leq d(f(M), f(M'))$$

1) Montrer que toute expansion est injective.

2) Montrer que l'ensemble des expansions de (A, d) est stable par composition.

3) Soit f une expansion bijective de (A, d). Montrer que f est une isométrie de (A, d) si et seulement si f^{-1} est une expansion de (A, d).
Soient A et B deux points de E (espace affine euclidien) et $\mathcal{A}$ le segment $[A, B]$.

4) Soit f une expansion de $(\mathcal{A}, d)$. Déterminer la paire $\{f(A), f(B)\}$.

5) En composant au besoin f avec une isométrie de $(\mathcal{A}, d)$, montrer que l'on peut se ramener au cas où $f(A) = A$ et $f(B) = B$. Déterminer alors f.

6) Déterminer l'ensemble des expansions de $(\mathcal{A}, d)$.

Isométries dans un cadre euclidien

Exercice n°13

1) Soit E un espace vectoriel euclidien.

- **a)** Soit $f : E \to E$ une application qui conserve le produit scalaire. Montrer que f est linéaire.
- **b)** Montrer qu'une application linéaire $f : E \to E$ est une isométrie si et seulement si elle conserve la norme.
- **c)** Soit $f : E \to E$ une isométrie qui laisse 0 fixe. Montrer que f est linéaire.
- **d)** Montrer que les isométries de E sont les applications $g : E \to E$ du type $t \circ f$ où t est une translation et f un endomorphisme orthogonal.

2) Soit X un espace affine euclidien d'espace vectoriel associé E.

- **a)** Montrer que toute isométrie $f : X \to X$ est une application affine.
- **b)** Soit $f : X \to X$ une application affine. Montrer que f est une isométrie si et seulement si son application linéaire associée $\overrightarrow{f}$ est une isométrie.
- **c)** Montrer que toute symétrie orthogonale de X *(et en particulier toute réflexion)* est une isométrie.

Exercice n°14

Soit X un espace affine euclidien. Déterminer toutes les isométries involutives de X.

Exercice n°15

Soit E un espace vectoriel euclidien. Soit f une isométrie linéaire de E (i.e. un élément de $\mathcal{O}(E)$) qui commute avec toutes les autres isométries linéaires.
Montrer que f préserve toutes les droites de E. En déduire la nature de f.

Exercice n°16 (Isométries du plan affine euclidien)

Soient X un plan affine euclidien et f une isométrie de X. On rappelle que par définition, une rotation est une composée de deux réflexions dont les axes sont soit confondus, soit sécants en un point.

1) Montrer que s'il existe trois points a, b et c *non alignés* fixés par f ($i.e$ $f(a) = a$, $f(b) = b$ et $f(c) = c$), alors f est l'identité.

2) Montrer que si f fixe deux points distincts o et a alors f est soit l'identité soit la réflexion d'axe (oa).

3) Soit o un point de X. Montrer que l'ensemble des isométries qui laissent o invariant est réunion de l'ensemble des réflexions dont l'axe passe par o et des rotations qui laissent o invariant.

4) Montrer que toute isométrie du plan est composée d'au plus trois réflexions.

5) Montrer que l'ensemble $Is(X)$ des isométries de X est un groupe et que pour tout point o de X, l'ensemble $Is_o(X)$ des isométries de X fixant o est un sous-groupe de $Is(X)$.

Angles de vecteurs du plan et de l'espace

Exercice n°17

Soit X un plan affine euclidien. On note $\mathcal{R}_o$ l'ensemble des rotations laissant o invariant.

1) Montrer que toute rotation de X *distincte de l'identité* a un point fixe et un seul (appelé centre de la rotation).

2) Soient $u = \overrightarrow{oa}$ et $v = \overrightarrow{ob}$ deux éléments de $\overrightarrow{X}$ non nuls tels que $\|u\| = \|v\|$. Montrer qu'il existe une rotation et une seule r de $\mathcal{R}_o$ telle que $r(a) = b$.

3) Soit r une rotation de $\mathcal{R}_o$. Pour toute réflexion s de $Is_0(X)$, montrer qu'il existe une réflexion s_1 de $Is_0(X)$ telle que $r = s_1 \circ s$ et qu'il existe une réflexion s_2 de $Is_0(X)$ telle que $r = s \circ s_2$.

4) Montrer que la composée d'un nombre impair de réflexions de $Is_o(X)$ est encore une réflexion.

5) Montrer que $\mathcal{R}_o$ est un sous-groupe commutatif de $Is_0(X)$.

Exercice n°18 *Surjectivité de* $\mathbb{R} \longrightarrow [-1, 1]$, $x \longmapsto \cos x$

On rappelle que pour tout réel x, $\cos x = \mathcal{R}e(e^{ix}) = \sum_{n\geq 0}(-1)^n \dfrac{x^{2n}}{(2n)!}$.

1) Montrer que $\cos 2 \leq 0$.

2) En déduire qu'il existe un réel $p > 0$ tel que $\cos p = 0$ et $\cos x > 0$ pour $0 \leq x < p$.

3) Démontrer l'égalité $1 + \cos x = 2\cos^2(\frac{x}{2})$. En déduire que $\cos 2p = -1$, puis que $\cos : \mathbb{R} \longrightarrow [-1, +1]$ est surjective.

Exercice n°19 *Angles orientés de vecteurs du plan*

Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension 2. On note $R = \mathcal{O}^+(E)$ le groupe des rotations et C l'ensemble des vecteurs de E de norme 1.

1) Sur l'ensemble $C \times C$ on considère la relation $\sim$ définie par : $(u, v) \sim (u', v')$ si et seulement si il existe une rotation r telle que : $r(u) = u'$ et $r(v) = v'$. Montrer que c'est une relation d'équivalence. L'ensemble quotient de $C \times C$ par cette relation est par définition l'*ensemble des angles orientés de vecteurs.* Il est noté $\mathcal{A}$. L'*angle orienté* $\widehat{(u, v)}$ est par définition l'image de (u, v) dans $\mathcal{A}$. On étend cette définition à tous les couples de vecteurs non nuls.

2) Montrer que les rotations et les homothéties conservent les angles.

3) Soit e un vecteur unitaire. On définit une application $\theta_e : R \to \mathcal{A}$ de la manière suivante : si r est une rotation, on pose $\theta_e(r) = \widehat{(e, r(e))}$.

a) Montrer que l'application θ_e est indépendante du choix de e. On notera dorénavant θ l'application telle que pour tout élément e de C, $\theta(r) = \widehat{(e, r(e))}$.
Pour toute rotation r, $\theta(r)$ est par définition, l'angle de la rotation r.

b) Montrer que θ est bijective.

c) En déduire (par transport de structure) que $\mathcal{A}$ peut être muni d'une loi de composition lui conférant une structure de groupe abélien.

d) Montrer que pour tous vecteurs unitaires u, v et w, on a $\widehat{(u,v)} + \widehat{(v,w)} = \widehat{(u,w)}$ (relation de Chasles).

e) Montrer que toute réflexion inverse les angles. Autrement dit, pour tous vecteurs non nuls u et v, et pour toute réflexion s,

$$\widehat{(s(u), s(v))} = -\widehat{(u,v)}$$

4) On choisit une base orthonormée $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ de E, et à tout réel x on associe le vecteur (unitaire) $u(x) = (\cos x)\, e_1 + (\sin x)\, e_2$. Notons $a(x) = \widehat{(e_1, u(x))}$.

a) Montrer que l'application $a : \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{A}$ est un homomorphisme de groupes, surjectif, de noyau $2\pi\mathbb{Z}$.

b) En déduire que le groupe des angles $\mathcal{A}$ est isomorphe au groupe $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$.

c) Que devient cet isomorphisme si l'on change de base orthonormée ?

Exercice n°20 *Angles géométriques de vecteurs du plan*
On garde les notations de l'exercice précédent.

1) Sur l'ensemble $C \times C$ on considère la relation notée $\approx$ définie par $(u', v') \approx (u, v)$ si et seulement si il existe un élément f de $\mathcal{O}(E)$ tel que $f(u) = u'$ et $f(v) = v'$. Montrer que c'est une relation d'équivalence et que la relation $\sim$ est strictement plus fine que la relation $\approx$.
L'*ensemble des angles géométriques* (ou non orientés) de vecteurs est l'ensemble quotient :

$$A = (C \times C)/\mathcal{O}(E) \;=\; (C \times C)/\approx$$

Pour tout couple de vecteurs unitaires (u, v), l'image de (u, v) dans A est l'*angle non orienté* de u et v, qui sera noté $\widehat{\{u, v\}}$.
Vérifier que définir l'angle géométrique $\widehat{\{u, v\}}$ revient à confondre les angles de vecteurs $\widehat{(u,v)}$ et $\widehat{(v,u)}$.

2) Montrer que l'on définit une application de A dans $[0, \pi]$ en associant à un angle géométrique $\widehat{\{u, v\}}$, le réel m de $[0, \pi]$ tel que m soit une mesure de $\widehat{(u,v)}$ ou de $\widehat{(v,u)}$.
Quelle est la somme des mesures des angles géométriques d'un triangle non aplati ?

3) Soient θ un angle de A et x et y deux vecteurs unitaires tels que $\theta = \widehat{\{x, y\}}$. On pose $\mathrm{Cos}(\theta) = < x, y >$. Montrer que l'application Cos : A $\longrightarrow [-1, +1]$ est bijective.

Exercice n°21 *Angles de vecteurs dans l'espace*
Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension 3. On note C l'ensemble des vecteurs de E de norme 1.

1) Sur l'ensemble $C \times C$ on considère la relation $\sim$ définie par : $(u, v) \sim (u', v')$ si et seulement si il existe un élément f de $\mathcal{O}^+(E)$ tel que : $f(u) = u'$ et $f(v) = v'$ ainsi que la relation $\approx$ définie par $(u', v') \approx (u, v)$ si et seulement si il existe un élément f de $\mathcal{O}(E)$ tel que $f(u) = u'$ et $f(v) = v'$. Montrer que ce sont des relations d'équivalence et quelles sont égales.
L'ensemble quotient de $C \times C$ par cette relation est par définition l'*ensemble des angles de vecteurs de l'espace*. Il est noté A.
L'image de (u, v) dans A est par définition *l'angle de vecteurs* (de l'espace) de u et v et est noté $\widehat{\{u, v\}}$.

2) Soit θ un angle de A et x et y deux vecteurs unitaires tels que $\theta = \widehat{\{x, y\}}$. On pose $\mathrm{Cos}(\theta) = < x, y >$. Montrer que l'application Cos : A $\longrightarrow [-1, +1]$ est bijective.

Exercice n°22

Le but de cet exercice est de montrer, géométriquement, que pour tout angle φ l'équation $2\,x = \varphi$, dans le groupe $\mathcal{A}$ des angles orientés de vecteurs du plan a deux solutions, et que si α est une solution, l'ensemble des solutions est $\{\alpha\,, \alpha+\omega\}$ (ω désigne l'angle plat). Soit E un plan vectoriel euclidien.

1) Soit $r \in \mathcal{O}^+(E)$. Montrer que $r^2 = Id$ équivaut à $r = Id$ ou $r = -Id$. On pourra remarquer que pour tout vecteur e, le vecteur $e + r(e)$ est invariant par r.
En déduire que pour tout angle x, l'équation $2x = 0$ a comme ensemble de solutions $\{0, \omega\}$.

2) Soient φ et x_0 deux angles tels que $2x_0 = \varphi$. Montrer que si x est un angle, pour que x soit solution de $2x = \varphi$ il faut et il suffit que $x - x_0$ appartienne à $\{0, \omega\}$.

3) Soient u, v deux vecteurs unitaires distincts tels que $\varphi = (\widehat{u, v})$. Soient w un vecteur directeur de la médiatrice de $\{u, v\}$ et $x_0 = (\widehat{u, w})$. Montrer que $\varphi = 2x_0$. Conclure.

4) On appelle *angles droits* les angles x solutions de l'équation $2x = \omega$. Montrer que $(\widehat{u, v})$ est droit si et seulement si $u \perp v$.

5) Résoudre dans $\mathcal{A}$ l'équation $4x = \varphi$.

6) Retrouver ces résultats en utilisant l'isomorphisme de groupes entre $\mathcal{A}$ et $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$.

Exercice n°23 *Angles et cocyclicité*

X désigne un plan affine euclidien. Afin d'identifier le groupe des angles orientés de vecteurs et le groupe des réels modulo 2π, on supposera de plus le plan orienté.

1)

a) Soient A, B, C trois points distincts du plan. Montrer que $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) + (\widehat{\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}}) + (\widehat{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}}) = \pi \bmod 2\pi$.
En déduire que si O, A, B sont les sommets d'un triangle non aplati, et isocèle en O, alors :

$$(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}}) + 2(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AO}}) = \pi \pmod{2\pi}$$

b) Montrer alors que si Γ est un cercle de centre O, et A et B deux points distincts de Γ alors, pour tout point C de Γ distinct de A et B, on a $2(\widehat{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}}) = (\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}}) \pmod{2\pi}$

2) Soient A et B deux points distincts d'une droite Δ. Montrer que :

a) L'ensemble des points M du plan, distincts de A, B, tels que $(\widehat{\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}}) = \pi \pmod{2\pi}$ est $]A, B[$.

b) L'ensemble des points M du plan, distincts de A, B, tels que $(\widehat{\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}}) = 0 \pmod{2\pi}$ est $\Delta \backslash [A, B]$.

c) L'ensemble des points M du plan, distincts de A, B, tels que $(\widehat{\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}}) = \pi \pmod{\pi}$ est $\Delta \backslash \{A, B\}$.

3)

a) Soient A et B deux points distincts, de médiatrice Δ et α un réel non nul modulo π. Montrer qu'il existe un point O et un seul de Δ tel que $(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}}) = \alpha \pmod{2\pi}$.

b) Soient A, B deux points distincts et α un réel non nul modulo π. Montrer que l'ensemble des points M du plan, distincts de A et B, tels que $(\widehat{\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}}) = \alpha \pmod{\pi}$ est un cercle passant par A et B, privé des points A et B.

4) Soient A, B, C, D quatre points deux à deux distincts du plan. Montrer que les points A, B, C, D sont alignés ou cocycliques. si et seulement si $(\widehat{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}}) = (\widehat{\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}}) \pmod{\pi}$.

5) Soient A, B deux points distincts et θ un réel non nul modulo π. Montrer que l'ensemble des points M du plan, distincts de A et B, tels que $(\widehat{\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}}) = \theta \pmod{2\pi}$ est un arc de cercle passant par A et B.

Extraits du concours

Exercice n°24 (D'après la 2$^{\text{ème}}$ épreuve de 1991)

Soient $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ deux vecteurs unitaires et non colinéaires d'un plan vectoriel euclidien E. Soient $\mathcal{D}$ et Δ les droites vectorielles orthogonales respectivement à $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$. On note s la réflexion d'axe $\mathcal{D}$ et t la réflexion d'axe Δ. On suppose que l'on a $<\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}> = -\cos\left(\dfrac{\pi}{m}\right)$ où $m \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$.

1) Montrer que l'on peut orienter E de manière que l'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}})$ ait pour mesure $\pi - \dfrac{\pi}{m}$. On supposera dorénavant E ainsi orienté.

2) On pose $r = s \circ t$. Donner une mesure de l'angle de r. Montrer que r est d'ordre fini et déterminer son ordre.

3) Soit ρ une rotation de E. Montrer que $\rho \circ s$ est une réflexion qui peut encore s'écrire $s \circ \rho^{-1}$.

4) Soit G l'ensemble des isométries vectorielles de la forme r^k ou $s \circ r^k$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

a) En utilisant la question précédente, montrer que G est un groupe.

b) Montrer que ce groupe est fini et préciser son cardinal.

Exercice n°25 (D'après la 2$^{\text{ème}}$ épreuve de 1998)

Soit $\mathcal{A}$ un plan affine euclidien orienté. Etant donnés deux points X et Y de $\mathcal{A}$, on note σ_{XY} la réflexion d'axe (XY).

Soient ABC un triangle et M un point n'appartenant pas aux droites (AB), (BC) et (CA). On pose $A' = \sigma_{BC}(M)$, $B' = \sigma_{CA}(M)$ et $C' = \sigma_{AB}(M)$. On note δ_A, δ_B et δ_C les droites passant respectivement par A , B et C et perpendiculaires respectivement aux droites $(B'C')$, $(C'A')$ et $(A'B')$.

On suppose que $A'B'C'$ est un vrai triangle et on note N le point de concours des droites δ_A, δ_B et δ_C.

1) Quelle est la nature de l'application affine $\sigma_{CA} \circ \sigma_{AB}$? En déduire que N est le centre du cercle circonscrit au triangle $A'B'C'$.

2) Montrer que $\sigma_{AB} \circ \sigma_{AN} \circ \sigma_{AC} = \sigma_{AM}$. En déduire que modulo π on a :

$$(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}}) = (\widehat{\overrightarrow{AN}, \overrightarrow{AC}}), \quad (\widehat{\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BM}}) = (\widehat{\overrightarrow{BN}, \overrightarrow{BA}}) \text{ et } (\widehat{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CM}}) = (\widehat{\overrightarrow{CN}, \overrightarrow{CB}})$$

(On dit que M et N sont *isogonaux* relativement au triangle ABC.)

3) Que peut-on dire du centre du cercle circonscrit et de l'orthocentre d'un triangle ?

Exercice n°26 (D'après la 2$^{\text{ème}}$ épreuve bis de 1982)

Soient $\mathcal{P}$ un plan affine euclidien et $\mathcal{C}$ le cercle de centre O et de rayon $R > 0$. On note S l'ensemble des symétries centrales du plan dont le centre appartient au cercle $\mathcal{C}$.

Montrer que toute translation du plan est la composée d'un nombre pair d'éléments de S.

Montrer que toute symétrie centrale du plan est la composée d'un nombre impair d'éléments de S.

Exercice n°27 (D'après la 2$^{\text{ème}}$ épreuve de 1976)

Soient E un espace vectoriel euclidien de dimension 2 et G un sous-groupe fini du groupe orthogonal de E. On note H l'ensemble des rotations de G.

1) Montrer que H est un sous-groupe distingué de G.

2) Pour toute rotation r de E, on note $\theta(r)$ la mesure de l'angle de r appartenant à l'intervalle $]0, 2\pi]$. Démontrer qu'il existe un élément r_1 de H tel que : $\forall r \in H,\ \theta(r) \geq \theta(r_1)$.
Démontrer que pour tout r de H, il existe un entier naturel m tel que $\theta(r) = m\theta(r_1)$. En déduire que H est un groupe cyclique dont r_1 est un générateur. Exprimer $\theta(r_1)$ en fonction de l'ordre n de H.

3) Déterminer un ensemble Δ d'éléments de E tel que H soit l'ensemble des rotations de E laissant Δ invariant. Donner en fonction de n le nombre minimum d'éléments de Δ.

4) On suppose $H \neq G$ et on désigne par s une réflexion appartenant à G. On note $sH = \{s \circ r,\ r \in H\}$.
Montrer que sH ne contient que des réflexions et que $G = H \cup sH$. Exprimer les éléments de G en fonction de s et r_1.

5) Démontrer qu'il existe deux types de sous-groupes finis de $\mathcal{O}(E)$ et en préciser la nature.

$\boxed{\textbf{Exercice n°28}}$ (D'après la 2ème épreuve de 1996)

Dans un plan affine euclidien orienté, on considère quatre points A, B, C, D tels que :

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC},\ d(A, B) = 2d(A, D),\ (\widehat{\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}}) = 2(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}}) \text{ et } \sin(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}}) > 0$$

Déterminer une mesure des angles $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}})$ et $(\widehat{\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BD}})$. Dessiner un tel parallélogramme en indiquant l'orientation sur la figure.