Courbes paramétrées : exercices

Exercice n°1

Étudier la courbe définie par $\begin{cases} x(t) = \dfrac{t^2+t-2}{t^2-2t} \\ y(t) = \dfrac{t^2+t-2}{t-2} \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}\backslash\{0, 2\}.$

Exercice n°2

Étudier la courbe définie par $\begin{cases} x(t) = \dfrac{t^2+1}{t^2-1} \\ y(t) = \dfrac{t^2}{t-1} \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}\backslash\{-1, 1\}.$

Exercice n°3

Soit $a > 0$. Étudier la courbe $\mathcal{C}$ définie par $\begin{cases} x(t) = a \sin t \\ y(t) = a\dfrac{\sin^2 t}{\cos t} \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}\backslash\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}.$

M étant un point de $\mathcal{C}$, la perpendiculaire à (OM) passant par M coupe (Oy) en un point N. Montrer que $MN = a$.

Vérifier que la normale en M à $\mathcal{C}$, la perpendiculaire à (OM) passant par O et la parallèle à (Ox) passant par N son concourantes.

Donner une équation cartésienne de $\mathcal{C}$.

Exercice n°4

Soit $a > 0$. Étudier la courbe $\mathcal{C}$ définie par $\begin{cases} x(t) = a \cos^3 t \\ y(t) = a \sin^3 t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$

La tangente en un point M de $\mathcal{C}$ coupe (en général) (Ox) et (Oy) en les points P et Q. Montrer que PQ est une constante que l'on notera k.

Montrer que toute droite coupant respectivement (Ox) et (Oy) en des points P et Q vérifiant $PQ = k$ est tangente à $\mathcal{C}$.