



PRA2 : Analyse et Probabilités

Corrigé rapide du problème à rendre pour le 2 mars 2017

Partie 1 : Une équation fonctionnelle

- 1) a) On a $f(0 + 0) = f(0)f(0)$ donc $f(0) = f(0)^2$ et $f(0) \in \{0, 1\}$. Si $f(0) = 0$, alors pour tout x réel, $f(x) = 0$ (on prend $y = 0$), et f est la fonction identiquement nulle. Par suite, $f(0) = 1$.
- b) Soit $x \in \mathbb{R}_+$. On a $f(x) = f(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}) = f(\frac{x}{2})^2 \geq 0$. D'autre part, si l'on avait $f(x) = 0$, alors, pour tout réel $t > 0$, on aurait :
- ou bien $t \geq x$ et alors $f(t) = f(x + (t - x)) = f(x)f(t - x) = 0$ (on a $t - x \geq 0$ donc l'écriture a un sens),
 - ou bien $0 < t < x$. On considère alors un entier naturel non nul n tel que $nt \geq x$ (un tel entier existe puisque $nt \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$) et on a donc $f(nt) = 0$ d'où, par une récurrence similaire à celle détaillée à la question suivante, $f(t)^n = 0$ donc $f(t) = 0$.
 f serait finalement identiquement nulle sur \mathbb{R}_+ , ce qui est exclu. Par suite, $f(x) > 0$.
- c) Pour $n \in \mathbb{N}$, notons \mathcal{P}_n la propriété : « $f(n) = f(1)^n$ »
- (initialisation) On a $f(0) = 1 = f(1)^0$ donc \mathcal{P}_0 est vraie.
 - (hérédité) Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. Supposons \mathcal{P}_n vraie et montrons qu'alors \mathcal{P}_{n+1} est vraie.
 On a $f(n + 1) = f(n)f(1) = f(1)^n f(1)$ (par hypothèse de récurrence) et donc $f(n + 1) = f(1)^{n+1}$.
 - (conclusion) D'après le théorème de récurrence on a donc $\forall n \in \mathbb{N}, f(n) = f(1)^n$.
 Soit à présent $x \in \mathbb{Q}_+$. On peut écrire $x = \frac{m}{n}$ avec $(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$. Mais alors $f(nx) = f(x)^n$ (même récurrence qu'à la question précédente) soit $f(1)^m = f(x)^n$ et donc $f(x) = f(1)^{\frac{m}{n}} = f(1)^x$.
- 2) Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Pour tout entier naturel non nul n , fixons un rationnel r_n (respectivement s_n) compris entre les deux réels distincts $x - \frac{1}{n}$ et x (respectivement x et $x + \frac{1}{n}$). On obtient ainsi deux suites de rationnels positifs (quitte à choisir $r_n = 0$ si $x - \frac{1}{n} < 0$) $(r_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(s_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ convergeant vers x et telles que $\forall n \in \mathbb{N}^*, r_n \leq x \leq s_n$.
 f étant décroissante on a : $\forall n \in \mathbb{N}^*, f(s_n) \leq f(x) \leq f(r_n)$ soit $f(1)^{s_n} \leq f(x) \leq f(1)^{r_n} = e^{r_n \ln(f(1))}$.
 En faisant tendre n vers l'infini, on obtient finalement $f(x) = e^{x \ln(f(1))} = e^{ax}$.

Partie 2 : Variables aléatoires sans mémoire

- 1) Pour $n \in \mathbb{N}$, notons $u_n = \mathbb{P}([X > n])$. On a alors :
- $$u_{n+1} = \mathbb{P}([X > n + 1]) = \mathbb{P}([X > n + 1] \cap [X > n]) = \mathbb{P}_{[X > n]}([X > n + 1])\mathbb{P}([X > n])$$
- soit $u_{n+1} = \mathbb{P}([X > 1])\mathbb{P}([X > n]) = u_1 u_n$. En posant $q = u_1$, la suite (u_n) est géométrique de raison q . Enfin, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $[X = n] = [X > n - 1] \cap \overline{[X > n]}$ donc $\mathbb{P}([X = n]) = u_{n-1} - u_n = q^{n-1} - q^n$ soit finalement $\mathbb{P}([X = n]) = p \cdot q^{n-1}$ où $p = 1 - q$. X suit la loi géométrique de paramètre p .
- 2) Soit $(x, y) \in (\mathbb{R}_+)^2$. On sait que : $\mathbb{P}_{[X > x]}([X > x + y]) = \frac{\mathbb{P}([X > x + y] \cap [X > x])}{\mathbb{P}([X > x])} = \frac{\mathbb{P}([X > x + y])}{\mathbb{P}([X > x])}$
- Donc, par hypothèse, :
- $$\mathbb{P}([X > x + y]) = \mathbb{P}([X > x])\mathbb{P}([X > y])$$
- Posons alors $f(x) = \mathbb{P}(X > x)$. La fonction f est clairement décroissante sur \mathbb{R}_+ et vérifie, pour tout $(x, y) \in (\mathbb{R}_+)^2, f(x + y) = f(x)f(y)$. D'autre part, $f(0) = 1$ et donc, par continuité de f (puisque X est une variable aléatoire continue), f n'est pas identiquement nulle sur \mathbb{R}_+ .
 La partie 1 assure alors l'existence d'un réel a tel que pour tout $x > 0, f(x) = e^{ax}$. Comme f est clairement positive, on a $a < 0$.
 Finalement, $\forall x > 0, \mathbb{P}(X \leq x) = 1 - f(x) = 1 - e^{ax}$ et X suit la loi exponentielle de paramètre $-a$.