UNIVERSITÉ DE RENNES 1

PRA2 : Analyse et Probabilités

Corrigé rapide du problème à rendre pour le 2 mars 2017

Partie 1 : Une équation fonctionnelle

1)a) On a $f(0+0) = f(0)f(0)$ donc $f(0) = f(0)^2$ et $f(0) \in \{0,1\}$. Si $f(0) = 0$, alors pour tout x réel, $f(x) = 0$ (on prend $y = 0$), et f est la fonction identiquement nulle. Par suite, $f(0) = 1$.

b) Soit $x \in \mathbb{R}_+$. On a $f(x) = f\left(\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\right) = f\left(\frac{x}{2}\right)^2 \geqslant 0$. D'autre part, si l'on avait $f(x) = 0$, alors, pour tout réel $t > 0$, on aurait :

- ou bien $t \geqslant x$ et alors $f(t) = f(x+(t-x)) = f(x)f(t-x) = 0$ (on a $t - x \geqslant 0$ donc l'écriture a un sens),
- ou bien $0 < t < x$. On considère alors un entier naturel non nul n tel que $nt \geqslant x$ (un tel entier existe puisque $nt \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$) et on a donc $f(nt) = 0$ d'où, par une récurrence similaire à celle détaillée à la question suivante, $f(t)^n = 0$ donc $f(t) = 0$.

f serait finalement identiquement nulle sur $\mathbb{R}_+^*$, ce qui est exclu. Par suite, $f(x) > 0$.

c) Pour $n \in \mathbb{N}$, notons $\mathscr{P}_n$ la propriété : « $f(n) = f(1)^n$ »

- *(initialisation)* On a $f(0) = 1 = f(1)^0$ donc $\mathscr{P}_0$ est vraie.
- *(hérédité)* Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. Supposons $\mathscr{P}_n$ vraie et montrons qu'alors $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie.
  On a $f(n+1) = f(n)f(1) = f(1)^n f(1)$ (par hypothèse de récurrence) et donc $f(n+1) = f(1)^{n+1}$.
- *(conclusion)* D'après le théorème de récurrence on a donc $\forall n \in \mathbb{N},\ f(n) = f(1)^n$.

Soit à présent $x \in \mathbb{Q}_+$. On peut écrire $x = \frac{m}{n}$ avec $(m,n) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}^*$. Mais alors $f(nx) = f(x)^n$ (même récurrence qu'à la question précédente) soit $f(1)^m = f(x)^n$ et donc $f(x) = f(1)^{\frac{m}{n}} = f(1)^x$.

2) Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Pour tout entier naturel non nul n, fixons un rationnel r_n (respectivement s_n) compris entre les deux réels distincts $x - \frac{1}{n}$ et x (respectivement x et $x+\frac{1}{n}$). On obtient ainsi deux suites de rationnels positifs (quitte à choisir $r_n = 0$ si $x - \dfrac{1}{n} < 0$) $(r_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(s_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergeant vers x et telles que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ r_n \leqslant x \leqslant s_n$.
f étant décroissante on a : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ f(s_n) \leqslant f(x) \leqslant f(r_n)$ soit $f(1)^{s_n} \leqslant f(x) \leqslant f(1)^{r_n} = e^{r_n \ell n(f(1))}$.
En faisant tendre n vers l'infini, on obtient finalement $f(x) = e^{x\ell n(f(1))} = e^{ax}$.

Partie 2 : Variables aléatoires sans mémoire

1) Pour $n \in \mathbb{N}$, notons $u_n = \mathbb{P}([X > n])$. On a alors :

$$u_{n+1} = \mathbb{P}([X > n+1]) = \mathbb{P}([X > n+1] \cap [X > n]) = \mathbb{P}_{[X>n]}([X > n+1])\mathbb{P}([X > n])$$

soit $u_{n+1} = \mathbb{P}([X > 1])\mathbb{P}([X > n]) = u_1 u_n$. En posant $q = u_1$, la suite (u_n) est géométrique de raison q.
Enfin, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $[X = n] = [X > n-1] \cap \overline{[X > n]}$ donc $\mathbb{P}([X = n]) = u_{n-1} - u_n = q^{n-1} - q^n$ soit finalement $\mathbb{P}([X = n]) = p.q^{n-1}$ où $p = 1 - q$. X suit la loi géométrique de paramètre p.

2) Soit $(x,y) \in (\mathbb{R}_+)^2$. On sait que : $\mathbb{P}_{[X>x]}([X > x+y]) = \dfrac{\mathbb{P}([X > x+y] \cap [X > x])}{\mathbb{P}(X > x)} = \dfrac{\mathbb{P}([X > x+y])}{\mathbb{P}([X > x])}$

Donc, par hypothèse, :

$$\mathbb{P}([X > x+y]) = \mathbb{P}([X > x])\mathbb{P}([X > y])$$

Posons alors $f(x) = \mathbb{P}(X > x)$. La fonction f est clairement décroissante sur $\mathbb{R}_+$ et vérifie, pour tout $(x,y) \in (\mathbb{R}_+)^2$, $f(x+y) = f(x)f(y)$. D'autre part, $f(0) = 1$ et donc, par continuité de f (puisque X est une variable aléatoire continue), f n'est pas identiquement nulle sur $\mathbb{R}_+^*$.
La partie 1 assure alors l'existence d'un réel a tel que pour tout $x > 0$, $f(x) = e^{ax}$. Comme f est clairement positive, on a $a < 0$.
Finalement, $\forall x > 0$, $\mathbb{P}(X \leqslant x) = 1 - f(x) = 1 - e^{ax}$ et X suit la loi exponentielle de paramètre $-a$.