

PRA2 : Analyse et Probabilités

Problème à rendre pour le 2 mars 2017

Partie 1 : Une équation fonctionnelle

Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction non identiquement nulle, vérifiant : $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+)^2, f(x + y) = f(x)f(y)$.

- 1)
 - a) Calculer $f(0)$.
 - b) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) > 0$.
 - c) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, f(n) = f(1)^n$ puis que $\forall x \in \mathbb{Q}_+, f(x) = f(1)^x$.
- 2) On suppose en outre que f est monotone sur \mathbb{R}_+ (par exemple décroissante) et on pose $a = \ln(f(1))$.
 Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}_+, f(x) = e^{ax}$.

Partie 2 : Variables aléatoires sans mémoire

Une variable aléatoire X , à valeurs positives, est dite **sans mémoire** si elle vérifie, pour tous x, y positifs, l'identité : $\mathbb{P}_{[X > x]}([X > x + y]) = \mathbb{P}([X > y])$

- 1) Soit X une variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{N}^* telle que, pour tous les entiers k et ℓ supérieurs à 1,

$$\mathbb{P}_{[X > \ell]}([X > k + \ell]) = \mathbb{P}([X > k])$$

Déterminer la loi de X .

(On pourra commencer par montrer que la suite de terme général $u_n = \mathbb{P}([X > n])$ est géométrique.)

- 2) Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et X une variable aléatoire continue définie sur Ω , à valeurs dans \mathbb{R}_+ , telle que pour tout $(x, y) \in (\mathbb{R}_+)^2$:

$$\mathbb{P}_{[X > x]}([X > x + y]) = \mathbb{P}([X > y])$$

Déterminer la loi de X .

(On pourra introduire la fonction $f : x \mapsto \mathbb{P}([X > x])$ et utiliser la première partie.)