PRA2 : Analyse et Probabilités

Problème à rendre pour le 2 mars 2017

Partie 1 : Une équation fonctionnelle

Soit $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction non identiquement nulle, vérifiant : $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+)^2,\ f(x+y) = f(x)f(y)$.

1) **a)** Calculer $f(0)$.

b) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) > 0$.

c) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ f(n) = f(1)^n$ puis que $\forall x \in \mathbb{Q}_+,\ f(x) = f(1)^x$.

2) On suppose en outre que f est monotone sur $\mathbb{R}_+$ (par exemple décroissante) et on pose $a = \ell n\,(f(1))$. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f(x) = e^{ax}$.

Partie 2 : Variables aléatoires sans mémoire

Une variable aléatoire X, à valeurs positives, est dite ***sans mémoire*** si elle vérifie, pour tous x, y positifs, l'identité : $\mathbb{P}_{[X>x]}([X > x+y]) = \mathbb{P}([X > y])$

1) Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle que, pour tous les entiers k et ℓ supérieurs à 1,

$$\mathbb{P}_{[X>\ell]}([X > k+\ell]) = \mathbb{P}([X > k])$$

Déterminer la loi de X.
(On pourra commencer par montrer que la suite de terme général $u_n = \mathbb{P}([X > n])$ est géométrique.)

2) Soit $(\Omega, \mathscr{T}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et X une variable aléatoire continue définie sur Ω, à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, telle que pour tout $(x,y) \in (\mathbb{R}_+)^2$:

$$\mathbb{P}_{[X>x]}([X > x+y]) = \mathbb{P}([X > y])$$

Déterminer la loi de X.
(On pourra introduire la fonction $f : x \longmapsto \mathbb{P}([X > x])$ et utiliser la première partie.)