Chapitre 1

Dénombrement

1.1 Cardinal d'un ensemble fini

1.1.1 Définition

Lemme 1.1. *Soit* $(n, p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$.
• *S'il existe une injection de* $\{1, \cdots, n\}$ *dans* $\{1, \cdots, p\}$ *alors* $n \leqslant p$.
• *S'il existe une bijection de* $\{1, \cdots, n\}$ *dans* $\{1, \cdots, p\}$ *alors* $n = p$.

Démonstration : Montrons la contraposée du premier point. Procédons par récurrence sur p en posant, pour tout entier naturel non nul p, $\mathscr{P}_p$ l'assertion : « Pour tout entier $n > p$, il n'existe pas d'injection de $\{1, \cdots, n\}$ dans $\{1, \cdots, p\}$. »

- *(initialisation)* Soit un entier $n > 1$. Si f est une application de $\{1, \cdots, n\}$ dans $\{1\}$ alors on a $f(n) = 1 = f(1)$ et donc f n'est pas injective. En particulier $\mathscr{P}_1$ est vraie.
- *(hérédité)* Soit $p \in \mathbb{N}^*$ fixé. Supposons $\mathscr{P}_p$ vraie et montrons qu'alors $\mathscr{P}_{p+1}$ est vraie.
  Soit un entier $n > p+1$. Supposons par l'absurde l'existence d'une injection f de $\{1, \cdots, n\}$ dans $\{1, \cdots, p+1\}$.

  ⋆ ou bien $f(n) = p + 1$ et alors $\forall k \neq n$, $f(k) \neq p + 1$ donc

  $$\begin{array}{rcl} \tilde{f} : \{1, \cdots, n-1\} & \longrightarrow & \{1, \cdots, p\} \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

  est une application et est une injection. C'est, par hypothèse de récurrence, absurde puisqu'on a $n - 1 > p$.

  ⋆ ou bien $f(n) \neq p+1$. Soit alors φ la bijection de $\{1, \cdots, p+1\}$ dans lui-même échangeant $f(n)$ et $p+1$ (et fixant tous les autres éléments). $\varphi \circ f$ est alors une injection (comme composée de deux telles applications) de $\{1, \cdots, n\}$ dans $\{1, \cdots, p + 1\}$ vérifiant $\varphi \circ f(n) = p + 1$. On retombe alors dans l'absurdité du cas précédent.
- *(conclusion)* D'après le théorème de récurrence on a donc établi le résultat.

Pour le second point, s'il existe une bijection f de $\{1, \cdots, n\}$ dans $\{1, \cdots, p\}$ alors $n \leqslant p$ car f est injective et $p \leqslant n$ car f^{-1} est bijective. On a bien $n = p$. □

Proposition et Définition 1.2. *Un ensemble non vide E est dit* ***fini*** *s'il existe un entier naturel non nul n et une bijection de E dans* $\{1, \cdots, n\}$.
Si un tel entier n existe, il est alors unique et est appelé ***cardinal*** *de E. On note alors* $\mathrm{Card}(E) = n$ *ou encore* $|E| = n$.
Par convention, l'ensemble vide est fini et est de cardinal 0.

Remarque. Il revient au même de dire qu'il existe une bijection de E dans $\{1, \cdots, n\}$ que de dire qu'il existe une bijection de $\{1, \cdots, n\}$ dans E.

Démonstration : Pour montrer l'unicité d'un tel n, supposons l'existence d'une bijection f de E dans $\{1, \cdots, n\}$ et d'une bijection g de E dans $\{1, \cdots, p\}$. $h = g \circ f^{-1}$ est alors une bijection de $\{1, \cdots, n\}$ dans $\{1, \cdots, p\}$. Le lemme permet alors de conclure. □

Remarque. La notion de cardinal coïncide avec la notion intuitive de nombre d'éléments d'un ensemble. Plus précisément, si $E \neq \emptyset$ est de cardinal n, on peut considérer une bijection f de E dans $\{1, \cdots, n\}$. En notant g la bijection réciproque de f et en posant $e_i = g(i)$ pour tout i de dans $\{1, \cdots, n\}$, on a alors : $E = \{e_1, \cdots, e_n\}$. On a donc numéroté les éléments de E.

Exercice. Montrer que deux ensembles finis sont en bijection si et seulement s'ils ont même cardinal.

1.1.2 Partie d'un ensemble fini

Lemme 1.3. *Soit E un ensemble fini de cardinal $n > 0$ et a un élément de E. Alors $E\backslash\{a\}$ est fini de cardinal $n - 1$.*

Démonstration : Si $n = 1$, alors $E = \{a\}$, donc $E\backslash\{a\} = \emptyset$ qui est fini, et $\mathrm{Card}(E\backslash\{a\}) = 0 = 1 - 1$. Supposons donc $n \geqslant 2$. Soit alors $h : \{1, \cdots, n\} \to E$ une bijection.

Si $h(n) = a$, alors $\tilde{h} : \{1, \cdots, n-1\} \to E\backslash\{a\}$ est encore bijective, donc $E\backslash\{a\}$ est fini de cardinal $n - 1$.

Si $h(n) \neq a$, alors par bijectivité de h, il existe un unique k tel que $h(k) = a$. On considère la bijection φ de $\{1, \cdots, n\}$ dans lui-même échangeant k et n (et fixant tous les autres éléments). $h \circ \varphi : \{1, \cdots, n\} \to E$ est alors bijective (comme composée) et $h \circ \varphi(n) = a$. On s'est ramené au cas précédent, et $E\backslash\{a\}$ est fini de cardinal $n - 1$.

□

Proposition 1.4 (Cardinal d'une partie d'un ensemble fini)**.** *Tout sous-ensemble A d'un ensemble fini E est fini et on a* $\mathrm{Card}(A) \leqslant \mathrm{Card}(E)$. *Ces cardinaux sont de plus égaux si et seulement si $A = E$.*

Démonstration : La démonstration du premier point est laissée à titre d'exercice. On pourra procéder par récurrence sur le cardinal de E en s'appuyant sur le lemme et en remarquant que, pour $a \in A$, $A\backslash\{a\} \subset E\backslash\{a\}$. On concluera alors en montrant que si $A\backslash\{a\}$ est fini alors il en est de même de A...
Pour le cas d'égalité, on suppose $A \subset E$ et $\mathrm{Card}(A) = \mathrm{Card}(E)$ (le sens indirect est immédiat). Si par l'absurde $A \neq E$ alors on peut considérer un élément $a \in E$ tel que $a \notin A$. Mais alors $A \subset E\backslash\{a\}$ et le premier point donne $\mathrm{Card}(A) \leqslant \mathrm{Card}(E) - 1$ ce qui est absurde. □

Remarque. Pour montrer l'égalité de deux ensembles finis, il suffit donc de montrer une inclusion et l'égalité des cardinaux.

Corollaire 1.5 (Cardinal d'une intersection)**.** *Si A et B sont deux parties finies d'un même ensemble E alors $A \cap B$ est un ensemble fini et* $\mathrm{Card}(A \cap B) \leqslant \min(\mathrm{Card}(A), \mathrm{Card}(B))$.

Démonstration : Il suffit de remarquer que $A \cap B \subset A$ et $A \cap B \subset B$. □

1.1.3 Cardinal d'une réunion

Théorème 1.6 (Réunion disjointe)**.** *Si A et B sont deux parties finies et* ***disjointes*** *d'un même ensemble E alors $A \cup B$ est un ensemble fini et* $\mathrm{Card}(A \cup B) = \mathrm{Card}(A) + \mathrm{Card}(B)$.

Démonstration : Le résultat est clair si A ou B est vide. Dans le cas contraire, notons $n = \mathrm{Card}(A)$ et $p = \mathrm{Card}(B)$ et considérons deux bijections $f : \{1, \cdots, n\} \to A$ et $g : \{1, \cdots, p\} \to B$. Posons alors

$$\begin{aligned} h : \{1, \cdots, n+p\} &\longrightarrow A \cup B \\ k &\longmapsto \begin{cases} f(k) & \text{si } k \leqslant n \\ g(k-n) & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

- Montrons que h est surjective. Soit $x \in A \cup B$. Si $x \in A$, f étant surjective, on peut écrire $x = f(k)$ pour un certain $k \in \{1, \cdots, n\}$ et on a $x = h(k)$. Sinon, $x \in B$ et, g étant surjective, on peut écrire $x = g(j)$ pour un certain $j \in \{1, \cdots, p\}$ et on a $x = h(n+j)$.
- Montrons que h est injective. Supposons donc $h(k) = h(k')$. Comme $f(k) = g(k'-n)$ et $g(k-n) = f(k')$ sont impossibles (car $A \cap B = \emptyset$), on a $f(k) = f(k')$ (et donc $k = k'$ car f est injective) ou $g(k-n) = g(k'-n)$ (et donc $k - n = k' - n$ car g est injective). On a donc bien toujours $k = k'$.

h est finalement bijective et le résultat annoncé en découle. □

Exercice. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que si $A_1, \ldots, A_n$ sont n parties finies deux à deux disjointes d'un même ensemble E alors $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ est un ensemble fini et $\mathrm{Card}\left(\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \mathrm{Card}(A_i)$.

Corollaire 1.7 (Cardinal du complémentaire)**.** *Si A est une partie de l'ensemble fini E alors $\overline{A}$ est un ensemble fini et* $\mathrm{Card}(\overline{A}) = \mathrm{Card}(E) - \mathrm{Card}(A)$.

Démonstration : Il suffit de remarquer que $E = A \cup \overline{A}$ et que $A \cap \overline{A} = \emptyset$. □

Théorème 1.8 (Cardinal d'une réunion)**.** *Si A et B sont deux parties finies d'un même ensemble E alors $A \cup B$ est un ensemble fini et* $\mathrm{Card}(A \cup B) = \mathrm{Card}(A) + \mathrm{Card}(B) - \mathrm{Card}(A \cap B)$.

Démonstration : On a $A \cup B = (A \cup B) \cap E = (A \cup B) \cap (B \cup \overline{B})$ donc par distributivité $A \cup B = (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) \cup B \cup (B \cap \overline{B}) = B \cup (A \cap \overline{B})$. Cette dernière réunion étant disjointe, $\mathrm{Card}(A \cup B) = \mathrm{Card}(B) + \mathrm{Card}(A \cap \overline{B})$. D'autre part, $A = A \cap E = A \cap (B \cup \overline{B})$ donc $A = (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$ et cette réunion étant disjointe, $\mathrm{Card}(A) = \mathrm{Card}(A \cap B) + \mathrm{Card}(A \cap \overline{B})$. En regroupant ces deux égalités, on obtient le résultat annoncé. □

Exercice. Montrer que si A, B et C sont trois parties finies d'un même ensemble E alors

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |C \cap A| + |A \cap B \cap C|.$$

1.1.4 Cardinal d'un produit cartésien

Théorème 1.9 (Cardinal d'un produit cartésien)**.** *Si E et F sont deux ensembles finis alors $E \times F$ est un ensemble fini et on a* $\mathrm{Card}(E \times F) = \mathrm{Card}(E) \times \mathrm{Card}(F)$.

Démonstration : Le résultat est clair si A ou B est vide.
Dans le cas contraire, notons n le cardinal de A. La première remarque de ce chapitre permet d'écrire $E = \{e_1, \cdots, e_n\}$ et on a donc $E \times F = \displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} \{e_i\} \times F$. Les $\{e_i\} \times F$ étant deux à deux

disjoints, on a alors $\mathrm{Card}(E\times F)=\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Card}(\{e_i\}\times F)$. Or, pour $i\in\{1,\cdots,n\}$ fixé, l'application $x\mapsto(e_i,x)$ est une bijection de F dans $\{e_i\}\times F$ donc $\mathrm{Card}(F)=\mathrm{Card}(\{e_i\}\times F)$. Finalement, $\mathrm{Card}(E\times F)=\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Card}(F)=n\mathrm{Card}(F)$. □

Exercice. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Montrer que si E_1, …, E_n sont n ensembles finis alors $E_1\times\cdots\times E_n$ est un ensemble fini et $\mathrm{Card}\,(E_1\times\cdots\times E_n)=\prod_{i=1}^{n}\mathrm{Card}(E_i)$.

1.1.5 Applications entre ensembles finis

Proposition 1.10. *Si E et F sont deux ensembles finis alors l'ensemble $\mathscr{F}(E,F)$ des applications de E dans F est fini et son cardinal est* $\mathrm{Card}(F)^{\mathrm{Card}(E)}$.

Démonstration : Notons n le cardinal de E et p celui de F. La remarque initiale permet de numéroter les éléments de E : $E=\{e_1,\cdots,e_n\}$. On construit alors une application φ de $\mathscr{F}(E,F)$ dans F^n en posant, pour $f\in\mathscr{F}(E,F)$, $\varphi(f)=(f(e_1),\cdots,f(e_n))$. On vérifie facilement que φ est bijective et on en déduit que $\mathrm{Card}(\mathscr{F}(E,F))=\mathrm{Card}(F^n)=p^n$. □

Corollaire 1.11. *Le nombre de parties d'un ensemble à n éléments est* 2^n.

Démonstration : Soit E un ensemble fini de cardinal n et

$$\begin{array}{rcl} f:\mathscr{P}(E) & \longrightarrow & \mathscr{F}(E,\{0,1\}) \\ A & \longmapsto & \mathbf{1}_A \text{ où } \mathbf{1}_A \text{ est définie par } \mathbf{1}_A(x)=1 \text{ si } x\in A \text{ et } \mathbf{1}_A(x)=0 \text{ sinon.}\end{array}$$

- f est surjective : si φ est une application de E dans $\{0,1\}$ alors, en posant $A=\{x\in E,\ \varphi(x)=1\}$, on a $\varphi=\mathbf{1}_A$.
- f est injective : si $\varphi(A)=\varphi(B)$ alors $x\in A\Leftrightarrow\mathbf{1}_A(x)=1=\mathbf{1}_B(x)$ donc $x\in A\Leftrightarrow x\in B$ et $A=B$.

φ étant une bijection, le cardinal de $\mathscr{P}(E)$ est celui de $\mathscr{F}(E,\{0,1\})$ soit 2^n d'après la proposition précédente. □

Proposition 1.12. *Si f est une application d'un ensemble fini E dans un ensemble F alors $f(E)$ est fini et* $\mathrm{Card}(f(E))\leqslant\mathrm{Card}(E)$ *avec égalité si et seulement si f est injective.*

Remarque. On retiendra qu'une application n'augmente jamais le nombre d'éléments…

Démonstration : Notons n le cardinal de E et introduisons une bijection φ de $\{1,\cdots,n\}$ dans E. L'application $g:f(E)\longrightarrow\{1,\cdots,n\}$, $y\longmapsto\min\{i\in\{1,\cdots,n\},\ f\circ\varphi(i)=y\}$ est alors injective (le vérifier !). $\tilde{g}:f(E)\longrightarrow g[f(E)]$, $x\longmapsto g(x)$ est alors bijective et comme $g[f(E)]\subset\{1,\cdots,n\}$, $g[f(E)]$ est fini de cardinal inférieur à n. Par bijection, il en est donc de même de $f(E)$.
Traitons à présent le cas d'égalité. Si f est injective, $\tilde{f}:E\longrightarrow f(E)$, $x\longmapsto f(x)$ est bijective donc $\mathrm{Card}(f(E))=\mathrm{Card}(E)$. Réciproquement, en notant $n=\mathrm{Card}(f(E))=\mathrm{Card}(E)$, on peut écrire $E=\{e_1,\cdots,e_n\}$ (numérotation) et donc $f(E)=\{f(e_1),\cdots,f(e_n)\}$. Ce dernier ensemble étant de cardinal n, on a : $\forall i\neq j$, $f(e_i)\neq f(e_j)$ et f est bien injective. □

Théorème 1.13. *Si E et F sont des ensembles finis* **de même cardinal** *et si f est une application de E dans F alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) f est injective *(ii) f est surjective* *(ii) f est bijective*

Démonstration : Si f est injective la proposition 1.12 donne $\text{Card}(f(E)) = \text{Card}(E) = \text{Card}(F)$. Comme $f(E) \subset F$, on a alors $f(E) = F$ (proposition 1.4) et f est donc surjective. On a montré (i) $\Rightarrow$ (ii). Réciproquement, si f est surjective $f(E) = F$ donc $\text{Card}(f(E)) = \text{Card}(F) = \text{Card}(E)$. La proposition 1.12 assure alors que f est injective : (ii) $\Rightarrow$ (i). □

Remarque. Le résultat n'est plus valable hors du cadre fini ! Par exemple, l'application $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto e^x$ est injective mais n'est pas surjective. . .

1.2 Dénombrement des listes et des combinaisons

1.2.1 p-listes d'un ensemble E à n éléments

Définition 1.14. *On se donne deux entiers naturels non nuls n et p et un ensemble E à n éléments. On appelle* ***p-liste*** *d'éléments de E tout p-uplet d'éléments de E. C'est donc un élément $(x_1, \cdots, x_p)$ de E^p (avec $\forall i \in \{1, ..., p\}$ $x_i \in E$).*

Remarque. Dans une p-liste d'eléments de E les éléments ne sont pas nécessairement distincts (ils peuvent se répéter), mais leur ordre dans la p-liste est important. On utilise donc les ***p*-listes** lorsque l'**ordre** est important et les **répétition**s possibles.

Exemples.

- Soit $E = \{0, 1, \cdots, 9\}$. $(3, 3, 3)$, $(1, 2, 3)$, $(1, 3, 2)$, $(3, 1, 2)$ sont quatre 3-listes distinctes d'éléments de E.
- Soit $E = \{a, b, c\}$. (a, b, b, c, a) est une 5-liste d'éléments de E.

Proposition 1.15. *Le nombre de p-listes d'un ensemble à n éléments est n^p.*

Démonstration : C'est en effet le cardinal de E^p. □

1.2.2 p-listes d'éléments distincts de E

Définition 1.16. *On se donne deux entiers naturels non nuls n et p et un ensemble E à n éléments. On appelle* ***p-arrangement*** *de E toute p-liste $(x_1, ..., x_p)$ d'éléments distincts de E : $x_i \neq x_j$ pour $i \neq j$.*
On note A_n^p le nombre de p-arrangements de E. On convient que $A_n^0 = 1$.

Remarque. Dans un p-arrangement d'éléments de E, les éléments sont tous distincts, et leur ordre dans la p-liste est important. On utilise donc les ***p*-arrangements** lorsque l'**ordre** est important et qu'il n'y a **pas de répétition** possible.

Exemple. Si $E = \{a, b, c, ..., y, z\}$ et $p = 5$, alors (a, e, g, p, b) et (a, g, p, b, e) sont deux 5-listes d'éléments distincts de E.

Proposition 1.17. *Si* $\text{Card}(E) = n$*, le nombre de p-arrangements de E est le nombre, noté A_n^p, est donné par :*

$$A_n^p = \begin{cases} n(n-1)\cdots(n-p+1) = \dfrac{n!}{(n-p)!} & \text{si } 0 \leqslant p \leqslant n \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Démonstration : Notons $\mathscr{A}_p$ l'ensemble des p-arrangements de E. Procédons par récurrence sur p en posant, pour tout entier naturel non nul p, $\mathscr{P}_p$ l'assertion :

« $\text{Card}(\mathscr{A}_p) = n(n-1)\cdots(n-p+1)$. »

- *(initialisation)* $\text{Card}(\mathscr{A}_1) = Card(E) = n$ donc $\mathscr{P}_1$ est vraie.
- *(hérédité)* Soit $p \in \mathbb{N}^*$ fixé, $p < n$. Supposons $\mathscr{P}_p$ vraie et montrons qu'alors $\mathscr{P}_{p+1}$ est vraie. Pour $x = (x_1, ..., x_p) \in \mathscr{A}_p$, notons $\mathscr{B}_x = \{(x_1, ..., x_p, x_{p+1}),\ x_{p+1} \in E\backslash\{x_1, ..., x_p\}\}$. On a alors $\text{Card}(\mathscr{B}_x) = \text{Card}(E\backslash\{x_1, ..., x_p\}) = n - p$. Il est d'autre part clair que $\mathscr{A}_{p+1} = \bigcup_{x \in \mathscr{A}_p} \mathscr{B}_x$ (le vérifier !). Les $\mathscr{B}_x$ étant deux à deux disjoints, on a :

$$\text{Card}(\mathscr{A}_{p+1}) = \sum_{x \in \mathscr{A}_p} \text{Card}(\mathscr{B}_x) = (n-p)A_n^p.$$

  Par hypothèse de récurrence on a donc $A_n^{p+1} = n \cdots (n-p+1)(n-p)$ et $\mathscr{P}_{p+1}$ est donc vraie.
- *(conclusion)* D'après le théorème de récurrence, $\mathscr{P}_p$ est vraie pour $1 \leqslant p \leqslant n$.

$\square$

Corollaire 1.18. *A_n^p est aussi le nombre d'injections d'un ensemble de cardinal p dans un ensemble de cardinal n ; en particulier, le nombre de bijections d'un ensemble fini E (de cardinal n) dans lui même (on parle de* ***permutations****) est $n!$.*

Démonstration : Pour le premier point, à toute injection f de $\{1, \cdots, p\}$ dans $\{1, \cdots, n\}$ on associe le p-arrangement $(f(1), \cdots, f(p))$ et on construit ainsi une bijection (le vérifier !) entre l'ensemble des injections de $\{1, \cdots, p\}$ dans $\{1, \cdots, n\}$ et l'ensemble des p-arrangements de $\{1, \cdots, n\}$.
Le second point en découle puisque les injections de $\{1, \cdots, n\}$ dans $\{1, \cdots, n\}$ sont les bijections de $\{1, \cdots, n\}$ dans $\{1, \cdots, n\}$ (théorème 1.13) et que $A_n^n = n!$. $\square$

1.2.3 Combinaisons

Définition 1.19. *Soit $p \in N^*$. On appelle* ***combinaison*** *à p éléments d'un ensemble E toute partie de E contenant p éléments.*

Remarque. Dans une combinaison, les éléments sont tous distincts et leur ordre est sans importance. On utilise donc les combinaisons lorsque l'ordre est sans importance et les répétitions impossibles.

Proposition 1.20. *Si card $E = n$, le nombre de combinaisons à p éléments de E se note $\binom{n}{p}$ et l'on a :*

$$\forall 0 \leqslant k \leqslant n \quad \binom{n}{p} = \frac{1}{p!}A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!p!}.$$

Démonstration : Pour $B \subset E$, notons $\mathscr{A}_k(B)$ l'ensemble de tous les arrangements de k éléments de B. Il est alors clair que l'on a la décomposition en réunion d'ensembles disjoints

$$\mathscr{A}_k(E) = \bigcup_{B \subset E,\, \text{Card}(B)=k} \mathscr{A}_k(B).$$

Autrement dit on a partitionné $\mathscr{A}_k(E)$ en regroupant dans une même classe $\mathscr{A}_k(B)$ tous les arrangements formés à partir des éléments d'une même partie B de cardinal k. Il y a donc autant de classes distinctes dans cette décomposition que de parties B de cardinal k dans E, c'est-à-dire $\binom{n}{k}$ classes. D'autre part chaque classe $\mathscr{A}_k(B)$ contient autant d'arrangements que de bijections de B dans B, c'est-à-dire $k!$. La réunion étant disjointe, on déduit alors : $\text{Card}(\mathscr{A}_k(E)) = \sum_{B \subset E,\, \text{Card}(B)=k} \mathscr{A}_k(B) = \binom{n}{k} k!$. soit $A_n^k = \binom{n}{k}k!$. $\square$

1.3 Propriétés des coefficients binomiaux

Proposition 1.21. *Si n et p sont deux entiers tels que $0 \leqslant p \leqslant n$ alors $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$.*

Démonstration : On vérifie que

$$\begin{array}{rcl} \{A \subset E, |A| = p\} & \longrightarrow & \{A \subset E, |A| = n-p\} \\ A & \longmapsto & \overline{A} \end{array}$$

est une application et est bijective. □

Proposition 1.22. *Si n et p sont deux entiers tels que $0 < p \leqslant n$ alors $\binom{n}{p} = \binom{n}{p-1} + \binom{n-1}{p}$.*

Démonstration : Soit E un ensemble fini de cardinal $n > 0$. Fixons un élément a de E. Soit $0 \leqslant p \leqslant n$ un entier. Notons $\mathscr{C}_p(E)$ l'ensemble de toutes les parties de E à p éléments. Il est alors clair que l'on a la décomposition en réunion d'ensembles disjoints

$$\mathscr{C}_p(E) = \{A \subset E,\ \mathrm{Card}(A) = p \text{ et } a \in A\} \cup \{A \subset E,\ \mathrm{Card}(A) = p \text{ et } a \notin A\}.$$

Or $\{A \subset E,\ \mathrm{Card}(A) = p \text{ et } a \in A\}$ est en bijection avec $\{B \subset E\backslash\{a\},\ \mathrm{Card}(B) = p-1\}$ (par l'application $A \longmapsto A\backslash\{a\}$ donc $\mathrm{Card}\left(\{A \subset E,\ \mathrm{Card}(A) = p \text{ et } a \in A\}\right) = \binom{n-1}{p-1}$. De même, $\{A \subset E,\ \mathrm{Card}(A) = p \text{ et } a \notin A\}$ est en bijection avec $\{B \subset E\backslash\{a\},\ \mathrm{Card}(B) = p\}$ (par l'application $A \longmapsto A$ donc $\mathrm{Card}\left(\{A \subset E,\ \mathrm{Card}(A) = p \text{ et } a \notin A\}\right) = \binom{n-1}{p}$.
On conclut alors en appliquant le théorème 1.6. □

Proposition 1.23 (Formule du binôme de Newton)**.** *Pour tous nombres (réels ou complexes) a et b et pour tout entier natuel n on a :*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Démonstration : On peut bien sûr procéder par récurrence mais on peut aussi avoir une approche combinatoire : élever $(a+b)$ à la puissance n revient à multiplier n binômes identiques $(a+b)$. Le résultat est une somme où chaque élément est le produit de n facteurs de type a ou b choisi chacun dans un binôme différent. Les termes sont ainsi de la forme $a^k b^{n-k}$. Chacun de ces termes est obtenu autant de fois qu'il existe de façons de choisir les k éléments a parmi les n, c'est à dire le nombre de combinaisons $\binom{n}{k}$. □