UNIVERSITÉ DE RENNES 1

MASTER 1
Métiers de l'Education, de l'Enseignement et de la Formation

Parcours : MATHÉMATIQUES

Module AG1 : Contrôle long

Durée : 5 heures

Calculatrice électronique de poche - y compris calculatrice programmable, alphanumérique ou à écran graphique - à fonctionnement autonome, non imprimante, autorisée conformément à la circulaire n° 99-186 du 16 novembre 1999.

L'usage de tout ouvrage de référence, de tout dictionnaire et de tout autre matériel électronique est rigoureusement interdit.

Dans le cas où un(e) candidat(e) repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il (elle) le signale très lisiblement sur sa copie, propose la correction et poursuit l'épreuve en conséquence.

De même, si cela vous conduit à formuler une ou plusieurs hypothèses, il vous est demandé de la (ou les) mentionner explicitement.

Ce sujet est composé de deux exercices et d'un problème totalement indépendants.
La clarté et la précision des raisonnements, la qualité de la rédaction interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Tournez la page S.V.P.

Exercice 1 : isométries de l'espace

On considère $\mathscr{E} = \mathbb{R}^3$ muni de sa structure canonique d'espace affine euclidien.
On rappelle que :

- Étant donnés deux points distincts A et B de $\mathscr{E}$, l'ensemble des points M situés à égale distance de A et B est un plan appelé ***plan médiateur*** du segment $[AB]$.
- Une isométrie de $\mathscr{E}$ est une application $f : \mathscr{E} \longrightarrow \mathscr{E}$ vérifiant : $\forall (A, B) \in \mathscr{E}^2 \qquad f(A)f(B) = AB$
- On appelle ***réflexion*** de $\mathscr{E}$ toute symétrie orthogonale par rapport à un plan de $\mathscr{E}$.

1) Soit f une isométrie de $\mathscr{E}$ fixant quatre points non coplanaires A_1, A_2, A_3, A_4. Montrer que f est l'identité. *On pourra raisonner par l'absurde et introduire un certain plan médiateur.*

2) Soit f une isométrie de $\mathscr{E}$, distincte de l'identité, fixant trois points non alignés A_1, A_2, A_3. Montrer que f est une réflexion.

3) Soit f une isométrie de $\mathscr{E}$, distincte de l'identité, fixant deux points distincts A_1 et A_2. Montrer que f est la composée d'au plus deux réflexions.

4) Montrer que toute isométrie de $\mathscr{E}$ est la composée d'au plus quatre réflexions.

Exercice 2 : interpolation

Pour tout entier naturel k, on désigne par $\mathbb{R}_k[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré au plus k.
Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(y_0, y_1, \cdots, y_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$.

1) Pour tout k de $\mathbb{N}$, on considère l'application $\phi_k : \mathbb{R}_k[X] \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$, $P \longmapsto (P(0), P(1), \ldots, P(n))$.

- **a)** Vérifier que l'application ϕ_k est linéaire.
- **b)** Déterminer, en fonction de k, le noyau de l'application ϕ_k. Préciser sa dimension.
- **c)** Étudier, suivant les valeurs de l'entier k, le rang de l'application ϕ_k. Pour quelles valeurs de l'entier k est-elle surjective ? Pour quelle valeur de l'entier k est-elle un isomorphisme ?
- **d)** Déduire des questions précédentes l'existence et l'unicité d'un polynôme Y de $\mathbb{R}_n[X]$, tel que, pour tout i compris entre 0 et n, $Y(i) = y_i$.

2) Étant donné un entier p compris entre 0 et n, soit ℓ_p le $(n+1)$-uplet de réels tous nuls sauf celui de rang p égal à 1 : $\ell_0 = (1, 0, \ldots, 0)$; $\cdots$; $\ell_p = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$; $\cdots$; $\ell_n = (0, \ldots, 0, 1)$.
Démontrer l'existence et l'unicité d'une base $\mathscr{L} = (L_0, L_1, \ldots, L_n)$ de l'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$ telle que pour tout couple d'indices i et j compris entre 0 et n, $L_i(j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$
Dans la base $\mathscr{L}$, quelles sont les coordonnées d'un polynôme P quelconque de $\mathbb{R}_n[X]$? Du polynôme Y de la question 1)d) ?

3) Soit k un entier supérieur ou égal à n. Déterminer la valeur minimale m_k du réel $\Delta_k(P)$ défini par la relation $\Delta_k(P) = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} (y_i - P(i))^2$ où P est un polynôme de $\mathbb{R}_k[X]$. Quels sont les polynômes P de $\mathbb{R}_k[X]$ pour lesquels l'expression $\Delta_k(P)$ est nulle ?

4) On suppose $k \leqslant n$. Prouver l'existence et l'unicité dans $\mathbb{R}_n[X]$ d'un produit scalaire, noté $< ., . >$ tel que la base $\mathscr{L}$ définie à la question 2) soit orthonormale. Préciser pour deux polynômes P et Q quelconques de $\mathbb{R}_n[X]$ la valeur de $< P, Q >$. Calculer les produits scalaires $< 1, 1 >$, $< 1, X >$ et $< 1, X^2 >$.

Problème : similitudes et affinités

Notations du problème

On note P le plan euclidien orienté et Π l'ensemble des vecteurs de P. Le choix d'un point de P permet d'identifier P et Π.
Les applications affines de P dans lui-même sont plus simplement appelées **applications affines** et sont notées par des lettres minuscules. Les endomorphismes de Π associés sont appelés **endomorphismes** et sont notés par la lettre majuscule correspondante.
On rappelle qu'une application affine f est déterminée par l'endomorphisme associé F et par l'image d'un point A puisque l'on a $F : \overrightarrow{u} = \overrightarrow{AM} \longmapsto \overrightarrow{f(A)f(M)}$. En particulier, lorsque f fixe un point, son étude est ramenée à celle de F.
Pour qu'une application affine f soit une **transformation affine**, il faut et il suffit que F soit un **automorphisme**, ce qui revient à dire que le déterminant de F, noté $\det(F)$, est non nul ; on dit alors que f et F sont **directs** si $\det(F) > 0$, et **indirects** si $\det(F) < 0$.

La symétrie orthogonale s par rapport à une droite D est appelée **réflexion** d'axe D. L'automorphisme orthogonal S associé est appelé réflexion d'axe Δ, où Δ désigne la direction de D.

Pour tout nombre réel θ, on note R_θ la **rotation** de Π dont θ est une mesure de l'angle. Lorsque $\theta = \dfrac{\pi}{2}$, il s'agit du **quart de tour direct**, noté plus simplement R. Dans ces conditions, toute rotation R_θ s'écrit sous la forme $R_\theta = \cos\theta I + \sin\theta R$, où I désigne l'identité.

La donnée d'un **parallélogramme** (ordonné) $\Gamma = (O, J, K, L)$ de P, où $\overrightarrow{OK} = \overrightarrow{OJ} + \overrightarrow{OL}$, équivaut à celle de $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, où $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OJ}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{OL}$. Dans toute la suite, on suppose que Γ n'est pas aplati, ce qui revient à dire que $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ est une base. Si cette base est directe, on dit que Γ est direct ; dans le cas contraire, on dit que Γ est indirect. Lorsque Γ est un carré, on dit que $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ est un **repère carré**, ou encore que $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ est une **base carrée**, ce qui revient à dire que $\overrightarrow{v} = R(\overrightarrow{u})$ si cette base est directe, et $\overrightarrow{v} = -R(\overrightarrow{u})$ dans le cas contraire.

Partie I
Caractérisation des similitudes par leur action sur les carrés

On dit qu'une transformation affine g est une **similitude** de rapport ρ si l'automorphisme associé G est de la forme $G = \rho U$, où $\rho > 0$ et où U est un automorphisme orthogonal (c'est à dire une isométrie vectorielle), dit associé à g. Dans ces conditions, on dit aussi que G est une similitude.

1. Prouver que l'image d'un parallélogramme par une transformation affine f est encore un parallélogramme. Étant donnés des parallélogrammes Γ et Γ', établir l'existence et l'unicité d'une transformation affine transformant Γ en Γ'.
2. Soient g une transformation affine et G l'automorphisme associé. Montrer qu'il est équivalent de dire :
   (a) La transformation g est une similitude directe de P.
   (b) Il existe un carré direct dont l'image par g est un carré direct.
   (c) Les automorphismes G et R commutent.
   (d) L'image par g de tout carré direct est un carré direct.
3. Caractériser de même les similitudes indirectes.

4. Soit $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ un repère non carré.
   (a) Montrer que $(O, \overrightarrow{u}+R(\overrightarrow{v}), \overrightarrow{v}-R(\overrightarrow{u}))$ est un repère carré indirect, $(O, \overrightarrow{u}-R(\overrightarrow{v}), \overrightarrow{v}+R(\overrightarrow{u}))$ est un repère carré direct, et que ce dernier repère se déduit du précédent par une similitude indirecte.
   (b) Exprimer le rapport ρ de cette similitude et déterminer l'axe Δ de la réflexion associée U.
   (c) Le plan P étant rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$, mettre en place sur une même figure les trois repères précédents et les parallélogrammes associés lorsque $\overrightarrow{u} = (3, 2)$ et $\overrightarrow{v} = (6, -1)$. Expliciter ρ et Δ. On prendra l'unité de longueur égale à 1 cm.

Partie II
Affinités orthogonales : composition, conjugaison

Étant donnés une droite D de P et un nombre réel λ non nul, on appelle **affinité orthogonale** d'axe D et de rapport λ l'application a de P dans P qui, à tout point M, associe le point N défini par la relation $\overrightarrow{HN} = \lambda\overrightarrow{HM}$, où H est la projection orthogonale de M sur D.

1. **Généralités**
   Soit a une affinité orthogonale d'axe D et de rapport λ.
   (a) Préciser la nature de l'affinité a lorsque $\lambda \in \{-1, 1\}$.
   (b) Montrer que, dans le cas général, a est une application affine dont on déterminera l'application linéaire associée. Déterminer l'ensemble de ses points fixes.
   (c) Montrer qu'une affinité orthogonale est une bijection du plan dans lui même. Quelle est la la nature de son inverse ?
2. **Composée de deux affinités orthogonales**
   Soient a_1 et a_2 des affinités orthogonales d'axes respectifs D_1 et D_2 et de rapports respectifs λ_1 et λ_2. Soit f la composée de a_1 et a_2, notée $f = a_2 a_1$.
   (a) On suppose que D_1 et D_2 sont parallèles et que $\lambda_1\lambda_2 = 1$. Montrer que f est une translation.
   (b) Déterminer la nature de f lorsque D_1 et D_2 sont parallèles et $\lambda_1\lambda_2 \neq 1$. Préciser alors l'ensemble des points fixes de f.
   (c) Montrer que D_1 et D_2 sont sécantes si et seulement si f admet un point fixe et un seul.
3. **Caractérisation du cas où ces affinités commutent**.
   (a) Déterminer toutes les droites stables par une affinité orthogonale a.
   (b) Prouver que si deux transformations affines f_1 et f_2 commutent (c'est-à-dire sont telles que $f_2 f_1 = f_1 f_2$), l'ensemble des points fixes de f_1 est stable par f_2.
   (c) Caractériser géométriquement les couples (a_1, a_2) d'affinités orthogonales tels que a_1 et a_2 commutent.
4. **Effet d'une conjugaison sur une affinité**.
   Soit a une affinité orthogonale d'axe D et de rapport λ. Préciser la nature de la transformation $a' = gag^{-1}$, où g est une similitude (on pourra d'abord déterminer les droites stables par a'). Que se passe-t-il si on suppose seulement que g est une transformation affine ?