Université de Rennes 1 2009-2010

Master 1 de Mathématiques / Préparation au CAPES

Compléments de cours : contrôle du jeudi 17 décembre 2009

Durée : 4 h - Aucun document autorisé

Le sujet comporte douze exercices totalement indépendants

Exercice n°1

Déterminer l'ensemble $\{(x, y, z) \in \mathbb{Z}^3,\ x^2 + y^2 = 3z^2\}$.

Exercice n°2

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et A et B deux matrices de $\mathcal{M}(n, \mathbb{R})$ semblables dans $\mathcal{M}(n, \mathbb{C})$: il existe une matrice inversible $P \in \mathcal{M}(n, \mathbb{C})$ telle que $B = P^{-1}AP$. Montrer que A et B sont semblables dans $\mathcal{M}(n, \mathbb{R})$.

Exercice n°3

Soit A une matrice de $\mathcal{O}(3, \mathbb{R})$ (c'est à dire $A \in \mathcal{M}(3, \mathbb{R})$ et ${}^tA.A = I$) distincte de $\pm I$. Soit f l'endomorphisme dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est A. On rappelle que f est alors un automorphisme orthogonal.

1) Montrer que $\det A = \pm 1$ et que les seules valeurs propres réelles possibles de A sont 1 et -1.

2) On suppose $\det A = +1$ et on note $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ les valeurs propres complexes de f.

- **a)** Montrer que 1 est valeur propre de f d'ordre 1 ou 3.

  On notera dorénavant E_1 le sous-espace propre de f associé à la valeur propre 1.

- **b)** Montrer que $E_1^\perp$ est invariant par f.
- **c)** Montrer que $\dim(E_1) = 1$. *(On pourra raisonner par l'absurde.)*
- **d)** Montrer que la restriction de f à $E_1^\perp$ est une rotation. *(On pourra s'intéresser à la matrice de f dans une base bien choisie.)*

3) Énoncer des résultats similaires dans le cas où $\det A = -1$.

Exercice n°4

Soit $\mathcal{A}$ un espace affine euclidien de dimension 3.

Montrer que toute isométrie de $\mathcal{A}$ est le produit d'au plus quatre réflexions (on pourra commencer par montrer qu'une isométrie fixant quatre points non coplanaires est nécessairement l'identité).

Exercice n°5

Soit E un espace vectoriel euclidien.

Étant donnés $u, v \in E \backslash \{0\}$ vérifiant $u \neq v$ et $\|u\| = \|v\|$, on cherche à montrer qu'il existe une unique réflexion (symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan) envoyant u sur v.

1) On note $\mathcal{P}$ l'orthogonal de la droite engendrée par $u - v$ et $s_{\mathcal{P}}$ la symétrie orthogonale par rapport à $\mathcal{P}$. Montrer que $s_{\mathcal{P}}(u) = v$.

2) Soit $\mathcal{Q}$ un hyperplan de E tel que $s_{\mathcal{Q}}(u) = v$. Que vaut $s_{\mathcal{Q}}(v - u)$? En déduire que $\mathcal{Q} \subset \mathcal{P}$ et conclure.

Exercice n°6

Soient A, B, C trois points distincts d'un plan affine euclidien X. Montrer que l'angle orienté de vecteurs $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) + (\widehat{\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}}) + (\widehat{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}})$ est égal à l'angle plat. En déduire que si A, B, C sont les sommets d'un triangle non aplati, et isocèle en C, alors : $(\widehat{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}}) + 2(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}})$ est aussi l'angle plat.

Exercice n°7

Étudier les suites récurrentes définies par $u_0 \in]0, 2[$ et $u_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{5}}(4 - u_n^2)$.

Exercice n°8

La série de terme général $\dfrac{(-1)^n}{(-1)^n + \sqrt{n}}$ converge-t-elle ?

Exercice n°9

L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx$ converge-t-elle ?

Exercice n°10

On considère un test visant à détecter une maladie. La maladie atteint 5% de la population. Des essais sur des populations de malades et de personnes saines ont permis de montrer que le test est positif avec probabilité 0,9 sur un malade, avec probabilité 0,1 sur une personne saine.

1) Exprimer les données de l'énoncé en termes probabilistes.

2) On effectue le test sur une personne prise au hasard dans la population. Quelle est la probabilité que le test soit positif ? Si le test est positif, quelle est la probabilité que la personne en question soit malade (donner le résultat sous la forme d'une fraction) ? Commenter.

3) Pour avoir plus d'assurance, on fait une deuxième fois le test, indépendamment, sur la même personne. On obtient une deuxième fois un test positif. Quelle est la probabilité que l'individu soit malade ?

Exercice n°11

On considère deux variables aléatoires X et Y définies sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathbb{P})$. La variable X suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ et la variable Y une loi exponentielle de paramètre $\mu > 0$. On rappelle que cela signifie que X prend presque sûrement une valeur dans $\mathbb{N}$ et que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $\mathbb{P}(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$ et que Y suit une loi de densité $\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(y) \mu \exp(-\mu y)$.

Calculer, si elles existent, les espérances de X et Y.

Exercice n°12

Une urne contient N_1 boules rouges et N_2 boules noires. On tire **sans remise** n boules ($1 \leq n \leq N_1 + N_2$) dans l'urne.

1) Donner un espace de probabilité $(\Omega, \mathbb{P})$ (ne tenant pas compte de l'ordre de tirage des boules) permettant de modéliser cette expérience aléatoire.

2) On appelle S le nombre de boules noires obtenues lors du tirage. Donner la loi de S.

3) Calculer l'espérance de S. Indication : utiliser deux fois la relation $p\binom{N}{p} = N\binom{N-1}{p-1}$.

Fin de l'épreuve !