Chapitre 1

Rappels sur les espaces et applications affines

1.1 Espaces et sous-espaces affines

1.1.1 Espaces affines

Définition 1.1 *On dit que le triplet* $(X, \overrightarrow{X}, \Phi)$ *est un espace affine (réel) de direction* $\overrightarrow{X}$ *si* X *est un ensemble non vide,* $\overrightarrow{X}$ *un espace vectoriel (réel) et* $\Phi : X \times X \to \overrightarrow{X}$ *une application vérifiant :*

- *1)* $\forall x \in X,\ \Phi_x : X \to \overrightarrow{X},\ y \mapsto \Phi(x, y)$ *est bijective*
- *2)* $\forall x, y, z \in X,\ \Phi(x, y) + \Phi(y, z) = \Phi(x, z)$ *(relation de Chasles).*

On note alors $\overrightarrow{xy} = \Phi(x, y)$ *et la relation de Chasles s'écrit* $\overrightarrow{xz} = \overrightarrow{xy} + \overrightarrow{yz}$.
Lorsque $\overrightarrow{X}$ *est de dimension finie, la dimension de l'espace affine* X *est par définition celle de* $\overrightarrow{X}$.

Remarque et notation. Soit $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{E}$. Soit $x \in X$. L'application Φ_x étant bijective, il existe un unique $y \in X$ tel que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{xy}$. L'application de X dans lui-même qui à x associe y est appelée *translation* de vecteur $\overrightarrow{u}$ et notée $t_{\overrightarrow{u}}$. Plutôt que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{xy}$, on note alors $y = x + \overrightarrow{u}$ c'est à dire $y = x + \overrightarrow{xy}$ (*notation de Grassmann*).

Exemple. Tout espace vectoriel $\overrightarrow{X}$ a une structure naturelle d'espace affine (en posant $X = \overrightarrow{X}$ et $\Phi : (x, y) \mapsto y - x$).

Dans toute la suite, $(X, \overrightarrow{X}, \Phi)$ **est un espace affine réel, noté plus simplement** X**.**

1.1.2 Sous-espaces affines

Définition 1.2 *Une partie* F *de* X *est un sous-espace affine (s.e.a.) (on dit aussi variété linéaire affine) s'il existe un point* A *de* X *et un sous-espace vectoriel* $\overrightarrow{F}$ *de* $\overrightarrow{X}$ *tel que* $F = A + \overrightarrow{F} = \{M \in X,\ \overrightarrow{AM} \in \overrightarrow{F}\}$.

Remarque. Un sous-espace affine est donc toujours non vide.

Propriété. Soient $A, A' \in X$ et $\overrightarrow{F}, \overrightarrow{F'}$ des sous-espaces vectoriels de $\overrightarrow{X}$. Alors :

$$A + \overrightarrow{F} = A' + \overrightarrow{F'} \iff \overrightarrow{F} = \overrightarrow{F'} \text{ et } \overrightarrow{AA'} \in \overrightarrow{F}$$

On parle alors du *sous-espace affine passant par* A *et de direction* $\overrightarrow{F}$. De plus, lorsque $\overrightarrow{F}$ est de dimension finie, la dimension du sous-espace affine F est par définition celle de $\overrightarrow{F}$.

Démonstration : $\Rightarrow$: Soient $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{F}$ et $M = A + \overrightarrow{u}$. On a alors $A, A' \in A' + \overrightarrow{F'}$; or $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{A'M} - \overrightarrow{A'A}$ donc $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{F'}$ puisque cet ensemble est stable par combinaison linéaire. De même $\overrightarrow{F'} \subset \overrightarrow{F}$.
$\Leftarrow$: Soit $M \in A + \overrightarrow{F}$ alors $\overrightarrow{AM} \in \overrightarrow{F}$. $\overrightarrow{A'M} = \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AA'} \in \overrightarrow{F} = \overrightarrow{F'}$ donc $M \in A' + \overrightarrow{F'}$. L'inclusion réciproque se montre de même. □

Remarques.

- Si F est un s.e.a. de X de direction $\overrightarrow{F}$ alors $(F, \overrightarrow{F}, \Phi_F)$ est un espace affine (où l'on a noté $\Phi_F : F \times F \to \overrightarrow{F}$, $(x, y) \mapsto \Phi(x, y)$).
- Si F est un s.e.a. alors pour tout A de F on a : $F = A + \overrightarrow{F}$.

Exemples.

- Si M est un point de X, le singleton $\{M\}$ est un sous-espace affine de X (de direction $\{\overrightarrow{0}\}$).
- On appelle droite affine tout sous-espace affine de X de la forme $A + \overrightarrow{F}$ où A est un point de X et $\overrightarrow{F}$ une droite vectorielle de $\overrightarrow{X}$.

Exercice 1.1 Montrer que par deux points distincts A et B de X il passe une unique droite affine que l'on notera (AB).

1.1.3 Sous-espace affine engendré

Propriété. Une intersection de sous-espaces affines de X est ou bien vide ou bien un sous-espace affine (dirigé par l'intersection des directions des s.e.a.).
Démonstration : La démonstration, immédiate, est laissée au lecteur. □

Exercice 1.2 Soient F et G deux s.e.a. de X tels que $\overrightarrow{F}$ et $\overrightarrow{G}$ soient supplémentaires dans $\overrightarrow{X}$. Montrer que $F \cap G$ est un singleton.

Définition 1.3 *Soit Y une partie non vide de l'espace affine X. On appelle sous-espace affine engendré par Y (et on note Aff(Y)) le plus petit sous-espace affine de X contenant Y : c'est l'intersection de tous les sous-espaces affines de X contenant Y.*

Exercice 1.3 Trois points de X sont dits alignés s'ils appartiennent à une même droite. Montrer que le sous-espace affine engendré par trois points non alignés est un plan affine (s.e.a. de direction un plan vectoriel).

1.2 Parallélisme

Définition 1.4 *Soient F et G deux sous-espaces affines de X de directions respectives $\overrightarrow{F}$ et $\overrightarrow{G}$. On dit que F est parallèle à G (et on note $F//G$) si $\overrightarrow{F} = \overrightarrow{G}$. On dit que F est faiblement parallèle à G si $\overrightarrow{F} \subset \overrightarrow{G}$.*

Exercice 1.4 Montrer que le parallélisme (respectivement le parallélisme faible) est une relation d'équivalence (respectivement une relation réflexive et transitive) sur l'ensemble des sous-espaces affines de X.

Exercice 1.5 Montrer que deux sous-espaces affines sont parallèles si et seulement s'il existe une translation qui envoie l'un sur l'autre.

Propriétés. Soient F et G deux sous-espaces affines de X.

- Si $F//G$ alors $F = G$ ou $F \cap G = \emptyset$.
- Si F est faiblement parallèle à G alors $F \subset G$ ou $F \cap G = \emptyset$.
- Pour que F soit faiblement parallèle à G, il faut et il suffit que F soit parallèle à un sous-espace affine de G.

Démonstration : Le premier point est clair : si $F \cap G \neq \emptyset$, on prend $A \in F \cap G$ et alors $F = A + \overrightarrow{F} = A + \overrightarrow{G} = G$. Le deuxième point se montre de même. Pour le troisième, le sens direct est immédiat (on choisit A dans G et $A + \overrightarrow{F}$ est un s.e.a. de G parallèle à F). Réciproquement, si F est faiblement parallèle à H (s.e.a. de G) alors $\overrightarrow{F} = \overrightarrow{H} \subset \overrightarrow{G}$. □

Exercice 1.6 Montrer que par tout point de X il passe une unique droite affine parallèle à une droite donnée.

1.3 Applications affines

1.3.1 Définition et premières propriétés

Définition 1.5 *Soient X et Y deux espaces affines réels de dimensions finies d'espaces vectoriels associés $\overrightarrow{X}$ et $\overrightarrow{Y}$. Une application $f : X \longrightarrow Y$ est dite affine s'il existe un point A de X tel que l'application $\overrightarrow{f_A} : \overrightarrow{X} \to \overrightarrow{Y}$, $u = \overrightarrow{AM} \longmapsto \overrightarrow{f_A}(u) = \overrightarrow{f(A)f(M)}$ soit linéaire.*

Propriété. Montrer que lorsque $f : X \longrightarrow Y$ est affine, l'application $\overrightarrow{f_A}$ est indépendante du choix de A dans X. On l'appelle l'application linéaire associée à f.
Démonstration : Fixons $A \in X$ tel que $\overrightarrow{f_A}$ soit linéaire et soit $B \in X$. Soit $u \in \overrightarrow{X}$. On peut écrire $u = \overrightarrow{BM}$ pour un certain point M de X et donc $u = \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AB}$ (relation de Chasles). Par linéarité de $\overrightarrow{f_A}$, $\overrightarrow{f_A}(u) = \overrightarrow{f(A)f(M)} - \overrightarrow{f(A)f(B)} = \overrightarrow{f(B)f(M)} = \overrightarrow{f_B}(u)$. □

Proposition 1.6 *Soient $\overrightarrow{f}$ une application linéaire de $\overrightarrow{X}$ dans $\overrightarrow{Y}$, A un point de X et B un point de Y. Il existe une unique application affine f de X dans Y vérifiant $f(A) = B$ et d'application linéaire associée $\overrightarrow{f}$.*
Cette application est définie par la formule $\forall M \in X,\ f(M) = B + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{AM})$.

Exemples. Les translations, les homothéties, les projections, les symétries sont des applications affines.

Propriétés.

- Une application affine $f : X \to X$ est une translation si et seulement si $\overrightarrow{f}$ est l'identité de $\overrightarrow{X}$.
- Une application affine $f : X \to X$ est une homothétie ou une translation si et seulement si $\exists \lambda \in \mathbb{R}^*$, $\overrightarrow{f} = \lambda id_{\overrightarrow{X}}$.

Exercice 1.7 Démontrer ces deux propriétés.