Questions test 2011-2012

Ce document contient une liste de questions, souvent sous la forme de vrai/faux, qui relèvent des programmes de licence. Nous estimons que les étudiants se présentant aux concours d'enseignement en Mathématiques doivent savoir analyser rigoureusement ces affirmations.

Testez-vous à l'aide de ces questions dès maintenant, et profitez-en, le cas écheant, pour révisez les points qui pourraient vous poser problème.

1 Ensembles et logique

Pour chacune des affirmations suivantes, préciser si elle est vraie ou fausse. Si elle est vraie, la démontrer. Si elle est fausse, donner un contre-exemple.

Les lettres A, B, C, X et Y désigneront trois ensembles, P et Q désigneront deux propositions.

1. Si $P \Rightarrow Q$ est vrai, alors $nonP \Rightarrow nonQ$ est vrai
2. Si $(P \Rightarrow Q) \Rightarrow Q$ est vrai, alors P est vrai
3. La négation de
$$\forall a \in A, \exists b \in B \textit{ et } \exists f : A \to B \textit{ tels que } a \in f^{-1}(b)$$
est
$$\exists a \in A \textit{ tel que } \forall b \in B \textit{ et } \forall f : A \to B, a \notin f^{-1}(b).$$
4. $\{1\} \in \{2^n, n \in \mathbb{Z}\}$
5. Soient $f : A \to B$ et $g : B \to C$ deux applications. L'application $g \circ f$ est surjective si et seulement si g est surjective.
6. Soient $f : X \longrightarrow Y$ une application et $A, B \subset Y$. On a l'égalité $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$.
7. Soient $f : X \longrightarrow Y$ une application et $A, B \subset X$. On a l'égalité $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.
8. Les quatre ensembles $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}$, $2\mathbb{N}$ et $\mathbb{Q}$ sont en bijection.
9. Soient f une application de E dans F, g une application de F dans G et $h = g \circ f$. Si h est surjective et g injective, alors f est surjective.
10. Soient E un ensemble non vide, A une partie de E et f une application de E dans E. Alors $f^{-1}(f(A)) = A$.
11. Il n'existe pas de relation d'ordre total sur l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes.
12. $\forall x \in \mathbb{R}$, $\exists y \in \mathbb{R}$, $(xy + 1 = 0 \Longrightarrow x = 0)$

2 Nombres

Pour chacune des affirmations suivantes, préciser si elle est vraie ou fausse. Si elle est vraie, la démontrer. Si elle est fausse, donner un contre-exemple.

2.1 Arithmétiques (nombres entiers)

Les lettres a, b et c désignent trois nombres entiers naturels non nuls.

1. Si $c|a$ et $c|b$, alors $c|ab$.
2. Si $c|a$ et $c|b$, alors $c|PPCM(a,b)$.
3. Si $c|a$ et $c|b$, alors $c|PGCD(a,b)$.
4. Si $c|ab$ et b est premier, alors $c|a$.

φ est l'indicatrice d'Euler : pour $a \neq 1$, $\varphi(a) = \#\{c|1 \leq c < a \ et \ PGCD(a,c) = 1\}$

5. c est premier si et seulement si $\varphi(c) = c - 1$.
6. $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$.
7. Il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $144\alpha + 187\beta = 1$.
8. Il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $n^2 \equiv 2 \mod 10$.
9. Il existe ℓ tel que $a^\ell \equiv 1 \mod c$.
10. Il existe un unique $c \in \mathbb{Z}$ tel que $c \equiv 2 \mod 3$, $c \equiv 3 \mod 5$ et $c \equiv 2 \mod 7$.
11. Si n^2 est un nombre pair, alors n est pair.
12. Pour tout nombre entier naturel n on a l'égalité $\sum_{k=0}^n k^3 = (\sum_{k=0}^n k)^2$.
13. Pour tout entier naturel non nul n, on a $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2$.
14. Si $pgcd(a,b) = 1$, alors il existe un unique couple d'entiers p, q tel que $ap + bq = 1$.
15. Si la somme de deux fractions irréductibles est un entier alors les dénominateurs de ces fractions sont égaux.
16. On ne peut pas trouver d'entier $n \geq 1$ telle que l'entier $a_n = 1! + 2! + \cdots + n!$ soit divisible par 5.

2.2 Nombres réels

1. Si x est un nombre irrationnel, alors pour tout nombre entier naturel non nul n le nombre x^n est irrationnel.
2. $\sqrt{5}$ est un nombre irrationnel.
3. Si x est un nombre décimal, alors $1/x$ est aussi décimal.
4. Soit a/b un rationnel, a/b est décimal si et seulement si b est une puissance de 10.
5. Pour tous nombres réls x et y, $x^2 - xy + y^2 \geq 0$.
6. Soient x et y des nombres réels. Si $xy > 0$ et $x < y$, alors $\frac{1}{x} > \frac{1}{y}$.
7. Soient a et b des nombres réels. On a $(e^a)^b = e^{(a^b)}$.
8. Soient a et b des nombres réels. On a $e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$.

2.3 Nombres complexes

1. Si l'entier n est un multiple de 3, alors $(1-i\sqrt{3})^n$ est un nombre réel.

2. Si z est un nombre complexe d'argument $\pi/3$, alors z^{100} est un nombre réel.

3. Le polynôme $X^2+2\cos(\pi/5)X+1$ admet deux racines complexes de modules égaux à 1.

4. Soient z et w deux nombres complexes tels que $arg(z) = arg(w)$. Il existe un nombre réel u tel que $z = uw$.

5. Si z, w, u, v sont les affixes de quatre points distincts alignés du plan, alors $\frac{z-u}{z-v}\frac{w-v}{w-u} \in \mathbb{R}$.

3 Polynômes

1. Soient P et Q deux polynômes à coefficients dans un corps K. Le degré de $P+Q$ est la somme des degrés de P et Q.

2. $P \in K[X]$ de degré d a au plus d racines distinctes dans le corps K.

4 Groupes finis

Pour chacune des affirmations suivantes, préciser si elle est vraie ou fausse. Si elle est vraie, la démontrer. Si elle est fausse, donner un contre-exemple.

1. Un groupe fini est commutatif.

2. Un groupe engendré par un nombre fini d'éléments est fini.

3. Soit p un nombre premier. Tout groupe d'ordre p^n admet un élément d'ordre p.

4. Si m et n sont deux entiers premiers entre eux alors $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est cyclique d'ordre mn.

5. Tous les groupes d'ordre 4 sont isomorphes.

6. Si H est un sous-groupe d'un groupe fini G, alors le cardinal de H divise celui de G.

7. Le groupe des permutations S_n a au moins $\binom{n}{2}$ sous-groupes d'ordre 2.

8. Le groupe des isométries préservant un carré est isomorphe au groupe S_4.

9. Tout groupe fini est isomorphe à un sous-groupe d'un groupe de permutations S_n.

5 Espaces vectoriels

1. De toute famille génératrice d'un espace vectoriel, on peut extraire une base.

2. De toute famille libre d'un espace vectoriel, on peut extraire une base.

3. Soient E un espace vectoriel et $(u_1, \ldots, u_n)$ une base de E. Pour tout vecteur non nul $v \in E$, la famille $(u_1, \ldots, u_n, v)$ est encore une base de E.

6 Géométrie

Pour chacune des affirmations suivantes, préciser si elle est vraie ou fausse. Si elle est vraie, la démontrer. Si elle est fausse, donner un contre-exemple.

1. La somme des mesures des angles d'un quadrilatère plan vaut 2π.
2. On considère les fonctions f et g définies en tout nombre réel x par $f(x) = x^2$ et $g(x) = 2x^2$. Dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct de centre O, on note C_f et C_g les courbes représentatives de f et de g. On appelle h l'homothétie de centre O et de rapport 2. Alors la courbe C_f est l'image par l'application h de la courbe C_g.
3. Dans le plan muni d'un repère on considère, pour tout nombre réel m, la droite D_m d'équation
$$D_m : (3m+5)x - (2m+6)y = m+1.$$
Alors toutes les droites D_m sont concourantes en un même point.
4. Soit f un isométrie du plan. Soient A et B deux points du plan et A' l'image du point A par f. On suppose $A \neq A'$. Si B est un point fixe de f, c'est-à-dire $f(B) = B$, alors B appartient à la médiatrice du segment $[AA']$.
5. Le plan affine euclidien étant rapporté à un repère orthonormal, deux droites non parallèles aux axes du repère sont perpendiculaires si et seulement si le produit de leurs coefficients directeurs est égal à -1.
6. Dans le plan complexe, on considère les points O, A et B d'affixe respective 0, $a = 2 - i$ et $b = \frac{1+i}{2}a$. Le triangle OAB est rectangle isocèle.
7. Dans un espace affine muni d'un repère, les plans P_1, P_2 et P_3 d'équations respectives $x - 2y + 3z = 3$, $2x + 3y - 2z = 6$ et $4x - y + 4z = 12$ n'ont pas de point commun.
8. Dans un espace affine muni d'un repère, la droite de représentation paramétrique $x = t + 2$, $y = -2t$, $z = 3t - 1$, avec $t \in \mathbb{R}$ est parallèle au plan dont une équation cartésienne est $x + 2y + z = 0$.
9. Dans un espace affine muni d'un repère, considérons les points A, B, C de coordonnées $(-1, 0, 2)$, $(1, 4, 0)$ et $(3, -4, -2)$. Le plan passant par A, B, C a pour équation $x + z = 1$.
10. Soient quatre points d'un plan affine euclidien A,B, C, D alors on a l'égalité suivante entre les angles géométriques $\widehat{ABC} = \widehat{ABD} + \widehat{DBC}$.
11. Dans un plan affine muni d'un repère, l'équation d'une droite est de la forme $y = ax + b$.
12. Si l'on connait les longueurs des côtés d'un triangle, alors on connait les mesures de ses angles.
13. Dans un plan affine euclidien, la composée d'une rotation et d'une translation est une rotation.
14. Dans un plan affine euclidien, la tangente en un point M à une courbe est la droite ne rencontrant la courbe qu'au point M.
15. Soit $(x(t), y(t))$ un paramétrage d'une courbe planaire. Si les fonctions x et y sont dérivables en t_0 alors la tangente au point $(x(t_0), y(t_0))$ est dirigée par le vecteur $(x'(t_0), y'(t_0))$.
16. Soient f et g deux fonctions définies de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(0; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on considère $M(t)$ le point de coordonnées $(f(t), g(t))$ et on note Γ la courbe décrite par le point $M(t)$ lorsque t décrit $\mathbb{R}$. Ainsi Γ est la courbe paramétrée par $\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$, t variant dans $\mathbb{R}$.

L'affirmation est la suivante : si les fonctions f et g sont paires, la courbe Γ est symétrique par rapport l'axe des ordonnées Oy.

17. Deux droites de l'espace sont parallèles si elles ne se rencontrent pas.

18. Deux droites de l'espace non coplanaires sont disjointes.

19. Un carré est un quadrilatère convexe dont les côtés ont même longueur.

20. Un triangle ABC est rectangle en B si et seulement si B appartient au cercle de diamètre [BC].

21. Un parallèlogramme est un quadrilatère convexe qui admet un centre de symétrie.

22. Quel est l'énoncé de la réciproque du théorème de Pythagore ?

23. Soient O, A et B trois points d'un plan affine euclidien. L'ensemble des points M tels que $2\widehat{AMB} = \widehat{AOB}$ est un cercle.

24. Donner la définition d'une homothétie.

25. Dans une espace affine muni d'un repère, le volume d'une boule de l'espace (de dimension trois) de rayon R est $\frac{4}{3}\pi R^2$.

7 Analyse

Pour chacune des affirmations suivantes, préciser si elle est vraie ou fausse. Si elle est vraie, la démontrer. Si elle est fausse, donner un contre-exemple.

7.1 Suites

1. Toute suite convergente de nombres réels est bornée.

2. Toute suite de nombres réels strictement croissante diverge vers $+\infty$.

3. Toute suite de nombres réels convergente est monotone à partir d'un certain rang.

4. La nature (convergence éventuelle) d'une suite ne dépend pas du choix de son premier terme.

5. Si une suite est divergente, alors elle n'est pas bornée.

6. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels non nuls. Si $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ converge vers un réel $a \geq 1$, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.

7. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels non nuls. Si la limite de $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ est égale à 1, alors la limite de $u_{n+1} - u_n$ est égale à 0.

8. Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est positive et converge vers 1, alors $(u_n^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge aussi vers 1.

9. Si une suite de nombres rationnels converge vers un réel l, alors $l \in \mathbb{Q}$.

10. Si f est monotone, alors toute suite de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$ est aussi monotone.

11. Si f est continue et admet un unique point fixe, alors toute suite de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$ converge.

12. Si la série de nombres réels $\sum_n a_n$ converge, alors la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

13. Si la suite de nombres réels $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0, alors la série $\sum_n a_n$ converge.

14. Soit I un sous-ensemble non vide et majoré de $\mathbb{R}$. Alors la borne supérieure de I appartient à I.

15. Les sous-ensembles compacts de $\mathbb{R}$ sont les segments.

16. Pour a un complexe de module strictement inférieur à 1, la somme de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} a^n$ est égale à $\frac{1}{1-a}$.

17. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels qui converge en décroissant vers 0. Le reste de la série alternée $\sum_n (-1)^n u_n$ satisfait $\sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k u_k \leq u_{n+1}$.

7.2 Fonctions

1. Une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}$ continue sur un segment de $\mathbb{R}$ est uniformément continue.

2. Toute fonction définie et continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ est dérivable sur l'intervalle I.

3. Toute fonction définie et dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ est continue sur l'intervalle I.

4. Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ périodique admet une limite en $+\infty$.

5. Soit x_0 un nombre réel, soient f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, la fonction f étant continue en x_0 alors que la fonction g ne l'est pas. La fonction $f+g$ n'est pas continue en x_0.

6. Soit f une fonction définie et croissante sur l'intervalle $[-3; 2]$ telle que $f(-3) = -1$ et $f(2) = 4$. Alors l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[-3; 2]$.

7. Soit f la fonction définie en tout réel x différent de -1 par $f(x) = \frac{5x+3}{4x+4}$. Alors, pour tout nombre réel x supérieur ou égal à 1, on a $f(x) \geq 1$.

8. Soit f une fonction définie et croissante sur $\mathbb{R}$. Si f est dérivable, alors sa fonction dérivée f' est positive ou nulle sur $\mathbb{R}$.

9. La fonction $h : x \mapsto x\sqrt{|x|}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

10. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Si f est périodique et monotone, alors f est constante.

11. Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, et g une fonction définie sur $f(I)$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Les fonctions f et g ne sont pas nécessairement dérivables. Si f est décroissante sur I et si g est décroissante sur $f(I)$, alors $g \circ f$ est croissante sur I.

12. Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Si f est paire, alors sa fonction dérivée f' est impaire.

13. Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$. Pour tout réels x et y, on a $f(x) - f(y) = (x-y)f'(y)$.

14. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Si f admet un développement limité à l'ordre 1 en $a \in \mathbb{R}$, alors f est dérivable en a.

15. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Si f admet un développement limité à l'ordre 2 en $a \in \mathbb{R}$, alors f est deux fois dérivable en a.

16. $\sin a = -\sin b$ si et seulement si $a = -b \mod 2\pi$ ou $a = \pi + b \mod 2\pi$.

17. $\sqrt{3}\cos x - \sin x = \sqrt{2}$ si et seulement si $x = \pi/12 \mod 2\pi$ ou $x = 19\pi/12 \mod 2\pi$.

18. Soient $a < b$ des réels et $f :]a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Si f tend vers $+\infty$ en a et en b, alors f admet un minimum sur $]a, b[$.

19. Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Si $f'(a) = 0$, alors f admet en a un extremum.

20. Soit E la fonction qui à un nombre réel associe sa partie entière. La fonction $x \mapsto \frac{x\sin(\pi x)}{E(x)}$ est continue sur $[1, +\infty[$.

21. Soit $f : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue ayant une limite finie en $+\infty$. Alors f est bornée sur $[0, +\infty[$.

22. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Si f est continue, alors f admet une primitive.

23. Soit f une fonction non identiquement nulle continue sur un segment et à valeurs dans $\mathbb{R}$. Alors f admet un nombre fini de zéros.

24. La fonction définie par $f(0) = 0$ et $f(x) = x\sin(\frac{1}{x})$ si $x \neq 0$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

25. La fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 0$ si $x \leq 0$ et $f(x) = x^\pi$ si $x > 0$ admet un développement limité jusqu'à l'ordre 3 en 0.

7.3 Intégration

1. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ périodique de période T. Pour tout réel a, on a $\int_a^{a+T} f(t)dt = \int_0^T f(t)dt.$

2. Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[0; 1]$. Si $\int_0^1 f(t)dt = 0$, alors f est nulle sur l'intervalle $[0; 1]$.

3. L'intégrale généralisée $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

4. L'intégrale généralisée $\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha < 1$.

7.4 Équations différentielles

1. Soit (E) l'équation différentielle $y'' + 9y = 0$. La seule solution de (E) qui vérifie la condition initiale $y(0) = 0$ est la fonction nulle.

8 Probabilités, statistiques

1. Le nombre de parties d'un ensemble à n éléments est 2^n.

2. Le nombre d'injections d'un ensemble à n éléments sur un ensemble à $p(\leq n)$ éléments est $n(n-1)...(n-p+1)$.

3. Si $(E, \mathbb{P})$ est un espace de probabilité fini, alors pour tout e dans E, on a $\mathbb{P}(\{e\}) = 1/card(E)$.

4. Deux événements indépendants A et B vérifient $A \cap B = \emptyset$.

5. Soit X une variable aléatoire discrète telle que $p(X = x_i) > 0$. On a $V(X) = 0$ si et seulement si X est constante.

6. Soient X et Y deux variables aléatoires, alors $E(XY) = E(X)E(Y)$.

Attention, maintenant il ne s'agit plus de Vrai/Faux.

1. On lance cinq fois un dé ou une pièce. Modéliser l'expérience aléatoire correspondante : espace des éventualités, probabilité.

2. Dans une urne contenant trois boules vertes et cinq boules rouges on tire successivement et sans remise quatre boules. Modéliser l'expérience aléatoire correspondante : espace des éventualités, probabilité.

3. Combien d'anagrammes le mot PROFESSEUR possède-t-il ? (Par exemple PRFSSROEEU est un anagramme de PROFESSEUR.)

4. Qu'est-ce qu'une loi sans mémoire ?

5. Montrer que les lois exponentielles sont sans mémoire.

6. Dans une urne contenant trois boules vertes et cinq boules rouges on tire successivement et sans remise quatre boules. Quelle est la probabilité que parmi ces quatre boules tirées deux soient vertes ?

7. On lance huit fois une pièce équilibrée. Quelle est la probabilité d'obtenir quatre fois pile ?

8. Énoncer la proposition appelée inégalité de Bienaymé Tchebychev.

9. Quels sont les espérances et variances d'une variable aléatoire suivant une loi binomiale ?

10. Quels sont les espérances et variances d'une variable aléatoire suivant une loi de Poisson ?

11. Quels sont les espérances et variances d'une variable aléatoire suivant une loi exponentielle ?

12. Qu'est-ce qu'un intervalle de confiance ?

13. Donner le coefficient directeur de la droite de régression d'une série statistique à deux variables.