

Thème : Probabilités
Calcul matriciel et probabilités

1. L'exercice proposé au candidat

On suppose qu'un virus d'un type donné V peut, dans la génération suivante, subir une mutation vers un autre type dans 20% des cas. On suppose aussi qu'un virus d'un type autre que V subit une mutation vers le type V dans 30% des cas.

On s'intéresse à une population de virus qui, à la génération 0, comporte 50% de virus de type V . On note:

- p_n la probabilité pour qu'un virus de cette population soit de type V à la génération n ;
- q_n la probabilité pour qu'un tel virus soit d'un autre type que V à la génération n .

- 1) Dessiner le graphe décrivant les probabilités de transition et déterminer p_0 et q_0 .
- 2) Déterminer une matrice carrée A d'ordre 2 telle que
$$\begin{pmatrix} p_{n+1} \\ q_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix} \text{ et montrer que } \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} p_0 \\ q_0 \end{pmatrix}.$$
- 3) Soient $B = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,6 \\ 0,4 & 0,4 \end{pmatrix}$ et $C = I - B$. Vérifier que $A = B + \frac{1}{2}C$.
- 4) Calculer B^2 , C^2 , BC et CB . En déduire que $B^n = B$ et $C^n = C$ pour tout $n \geq 1$.
- 5) En déduire une expression simple de A^n en fonction de B et C à l'aide de la formule du binôme de Newton.
- 6) Calculer les limites des suites (p_n) et (q_n) .

2. Le travail demandé au candidat

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury.

Pendant sa préparation, le candidat traitera les questions suivantes :

- Q.1) Déterminer les connaissances mises en jeu qui relèvent du calcul matriciel et de la théorie des probabilités. A quel niveau l'exercice est-il destiné ?
- Q.2) Les limites des suites (p_n) et (q_n) auraient-elles été différentes avec une autre répartition de départ ?
- Q.3) Proposer une autre méthode pour calculer les limites des suites (p_n) et (q_n) .

Sur ses fiches, le candidat rédigera et présentera :

- Sa réponse à la question Q.3)
- Un autre exercice sur le thème "Calcul matriciel et probabilités".