Thème : Interprétation géométrique des nombres complexes

1. L'exercice proposé au candidat

1) Les nombres complexes a_1, a_2, a_3 et a_4 sont donnés.
Résoudre le système d'équations :

$$\begin{cases} z_1 + z_2 & = & a_1 \\ z_2 + z_3 & = & a_2 \\ z_3 + z_4 & = & a_3 \\ z_4 + z_1 & = & a_4 \end{cases}$$

d'inconnue $(z_1, z_2, z_3, z_4) \in \mathbb{C}^4$.

2) Dans le plan, on considère un quadrilatère $A_1A_2A_3A_4$.
Montrer qu'il existe un quadrilatère $M_1M_2M_3M_4$ dont les milieux des côtés sont les points A_1, A_2, A_3 et A_4 si et seulement si le quadrilatère $A_1A_2A_3A_4$ est un parallélogramme.
Montrer que, dans ce cas, le point de concours des diagonales du parallélogramme $A_1A_2A_3A_4$ est l'isobarycentre des points M_1, M_2, M_3 et M_4.

2. Le travail demandé au candidat

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury.

Pendant sa préparation, le candidat traitera les questions suivantes :

Q.1) Dégager les diverses étapes de la résolution de la première question de l'exercice.

Q.2) Indiquer les connaissances et savoir-faire mis en jeu dans cet exercice.

Sur ses fiches le candidat rédigera et présentera :

- ◇ Sa réponse à la question **Q.1)**.
- ◇ L'énoncé d'un ou plusieurs exercices se rapportant au thème « **Interprétation géométrique des nombres complexes** ».

3. Quelques références aux programmes

Programme de terminale scientifique

Contenus	**Modalités de mise en œuvre**	**Commentaires**
Géométrie plane : nombres complexes		
Le plan complexe : affixe d'un point ; parties réelle et imaginaire d'un nombre complexe. Conjugué d'un nombre complexe. Somme, produit, quotient de nombres complexes. Module et argument d'un nombre complexe ; module et argument d'un produit, d'un quotient. Écriture $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$.	Le vocabulaire sera introduit à partir de considérations géométriques. On retrouvera à cette occasion la notion de coordonnées polaires et celle, sous-jacente, d'équation paramétrique d'un cercle sous la forme $z = z_\omega + re^{i\theta}$ ou $x = x_\omega + r\cos(\theta), y = y_\omega + r\sin(\theta)$ La notation exponentielle sera introduite près avoir montré que la fonction $\theta \mapsto \cos(\theta) + i\sin(\theta)$ vérifie l'équation fonctionnelle caractéristique des fonctions exponentielles.	La vision des nombres complexes est d'abord géométrique : calculs sur des points du plan. Les repérages cartésien et polaire introduits en première conduisent naturellement à deux écritures d'un nombre complexe. L'objectif est ensuite de montrer la puissance de ce calcul dans les problèmes de géométrie. On introduira dans ce chapitre quelques éléments lui donnant une dimension historique. Les nombres complexes permettent de retrouver et de mémoriser les formules trigonométriques d'addition et de duplication vues en première.
Résolution dans $\mathbb{C}$ des équations du second degré à coefficients réels.		
Interprétation géométrique de $z \mapsto z$ avec $z = z + b$ ou $z' - w = k(z - w)$ avec k réel non nul, ou $z - w = e^{i\theta}(z - w)$.	On utilisera les nombres complexes pour traiter des exemples simples de configurations et résoudre des problèmes faisant intervenir des translations, des rotations, des homothéties.	On exploitera à la fois les possibilités offertes par les nombres complexes et les raisonnements géométriques directs qui réactivent les connaissances antérieures, notamment sur les transformations du plan.