Dossier 50/1-2 *Sujet 2005 adapté*

Thème : Outils : Les nombres complexes

L'exercice

On se donne trois points non alignés A, B, C du plan, et le triangle T de sommets A, B, C. On se propose ici de démontrer, *uniquement à l'aide des nombres complexes*, la propriété géométrique classique suivante :

Les hauteurs de T sont concourantes en un point H, appelé *orthocentre* de T.

1) Montrer qu'on peut munir le plan d'un repère orthonormé tel que les affixes respectives a, b, c des points A, B, C soient de module 1. On suppose qu'il en est ainsi dans la suite de l'exercice.

2) On définit le point H d'affixe $h = a + b + c$.
Montrer que les hauteurs du triangle T se coupent au point H (indication : on pourra considérer $z = \dfrac{h-c}{b-a}$)
Montrer que H est aligné avec le centre de gravité de T et le centre du cercle circonscrit à ce triangle.

La solution proposée par un élève à la question 2.a)

On cherche d'abord si la droite (AH) est une hauteur du triangle.
On doit avoir $(AH) \perp (BC)$*. On calcule le produit scalaire des vecteurs* $\overrightarrow{AH}$ *et* $\overrightarrow{BC}$*.*
$\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC} = (h-a)(c-b) = (b+c)(c-b) = c^2 - b^2 = |c|^2 - |b|^2 = 1 - 1 = 0.$
Donc (AH) est perpendiculaire à (BC).
Aussi : $\overrightarrow{BH}.\overrightarrow{AC} = (h-b)(c-a) = (a+c)(c-a) = c^2 - a^2 = 0.$
Et aussi : $\overrightarrow{CH}.\overrightarrow{AB} = (h-c)(b-a) = (a+b)(b-a) = b^2 - a^2 = 0$*. On a bien* $(BH) \perp (AC)$ *et* $(CH) \perp (AB)$*, ce sont des hauteurs, ce qui fait que* H *est l'orthocentre du triangle.*

Le travail à exposer devant le jury

1- Illustrer le résultat à l'aide d'un logiciel de géométrie.

2- Analyser la production de l'élève en mettant en évidence les compétences acquises et l'origine de ses éventuelles erreurs.

3- Présenter une correction de la question 2.a) telle que vous l'exposeriez devant une classe de Terminale.

4- Proposer un ou deux exercices présentant la résolution, à l'aide des complexes, d'un problème de géométrie.