

Dossier 41-1

Thème : Equations différentielles
Exemples de problèmes issus de la géométrie, de la physique, de la biologie, de l'économie, des probabilités... conduisant à la résolution d'une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants.

1. L'exercice proposé au candidat

Le circuit RLC.

On considère un circuit électrique de type **RLC** dont la tension aux bornes est constante. Soit $I(t)$ l'intensité du courant, que l'on désire déterminer, au temps t . L'équation différentielle qui modélise le comportement du circuit est donné par:

$$L \cdot I''(t) + R \cdot I'(t) + \frac{1}{C} \cdot I = 0 \quad (1)$$

où

- L est l'inductance, une constante positive ($L > 0$) de stabilité qui s'oppose aux variations abruptes de l'intensité du courant.
- R est la résistance, une constante positive ($R \geq 0$) qui représente une force de frottement.
- C est la capacité du condensateur, une constante positive ($C > 0$).

En absence de résistance ($R = 0$) et si $k^2 = \frac{1}{LC}$, déterminer tous les $k \in \mathbb{R}$ tels que (1) ait une solution négative sur $]0, 3[$ qui s'annule en 0 et 3, ($I(t) < 0$ si $t \in]0, 3[$ et $I(0) = I(3) = 0$). Écrire ensuite toutes les solutions de (1).

En absence de résistance ($R = 0$), quelles contraintes doivent vérifier les solutions de (1) qui s'annulent en 0 et 3 et en un autre point $z \in]0, 3[$, par exemple si $z = 1$?

2. Le travail demandé au candidat

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury.

Après avoir résolu et analysé cet exercice le candidat indiquera sur sa fiche:

1. Les objectifs de cet exercice, les notions et les outils mathématiques utilisés pour sa résolution, ainsi que les niveaux auxquels chaque partie de l'énoncé s'adresse.
2. En faisant varier les paramètres le candidat montrera la dépendance des solutions des paramètres physiques.
3. Proposer deux exercices sur le même thème.