Dossier 40-03 *Sujet 2010 adapté*

Thème : Équations différentielles

L'exercice

On se propose d'étudier les fonctions f dérivables sur $[0, +\infty[$ vérifiant la condition

$$(1) \quad \begin{cases} \text{pour tout } x \in [0, +\infty[,\ f(x)f'(x) = 1 \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

1) On se propose de démontrer qu'une fonction vérifiant la condition (1) est strictement positive sur $[0, +\infty[$.

   1.a) Montrer que si la fonction f vérifie (1) alors f ne s'annule pas sur $[0, +\infty[$.

   1.b) On suppose que la fonction f vérifie la condition (1) et qu'il existe un réel a strictement positif tel que $f(a) < 0$. En déduire que l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[0, a]$.

   1.c) Conclure.

2) Existence et unicité de la fonction :

   2.a) Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I. Déterminer une primitive de la fonction uu' sur cet intervalle.

   2.b) En déduire que si f est telle que, pour tout $x \in [0, +\infty[$, $f(x)f'(x) = 1$ alors il existe une constante C telle que pour tout $x \in [0, +\infty[$,

$$(f(x))^2 = 2x + C$$

   2.c) On rappelle que $f(0) = 1$. Déterminer l'expression de $f(x)$ pour x réel positif.

Le travail à exposer devant le jury

1- Dégager les méthodes et savoirs mis en jeu dans l'exercice.

2- Présenter une solution des questions 1.b) et 2.b).

3- Proposer un ou plusieurs exercices se rapportant au thème **"Équations différentielles"**.