

## Thème : Équations différentielles

### 1. L'exercice proposé au candidat

On se propose de déterminer les fonctions  $f$  définies et dérivables sur l'ensemble  $\mathbb{R}$  et vérifiant pour tout réel  $x$  l'équation :

$$(E) : f'(x) = f(-x)$$

1. Démontrer que la fonction nulle est solution de cette équation.
2. Dans cette question et les suivantes, la fonction  $f$  est supposée non identiquement nulle. Après avoir prouvé que  $f$  est deux fois dérivable, trouver une équation linéaire du second ordre ( $E'$ ) admettant  $f$  comme solution.
3. a) Résoudre ( $E'$ )  
b) En déduire les fonctions  $f$  solutions de ( $E$ ).

### 2. Le travail demandé au candidat

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury

**Pendant sa préparation, le candidat traitera les questions suivantes :**

- Q.1) Dégager les méthodes et les théorèmes utilisés dans cet exercice.
- Q.2) En admettant que l'équation ( $E$ ) possède une unique solution vérifiant  $f(0) = 1$ , proposer un algorithme qui permette d'obtenir une représentation graphique approchée de cette solution sur l'intervalle  $[-3; 3]$

**Sur ses fiches, le candidat rédigera et présentera :**

- À l'aide de la calculatrice, l'algorithme permettant d'obtenir la construction de l'approximation évoqué à la question Q. 2).
- Deux exercices sur le thème : « **Équations différentielles** »

### 3. Quelques références aux programmes

#### Classe de Première STI

Dans l'ensemble du programme, il convient de mettre en valeur les aspects algorithmiques des problèmes étudiés. On explicitera ce type de démarche sur quelques exemples simples : construction et mise en forme d'algorithmes, comparaison de leurs performances pour le traitement d'un même problème ; mais aucune connaissance spécifique sur ces questions n'est exigible des élèves.

#### 4. EMPLOI DES CALCULATRICES

L'emploi des calculatrices en mathématiques a pour objectif, non seulement d'effectuer des calculs, mais aussi de contrôler des résultats, d'alimenter le travail de recherche et de favoriser une bonne approche de l'informatique. Les élèves doivent savoir utiliser une calculatrice programmable dans les situations liées au programme de la classe considérée. Cet emploi combine les capacités suivantes, qui constituent un savoir-faire de base et sont seules exigibles :

- Savoir effectuer les opérations arithmétiques sur les nombres et savoir comparer des nombres ;
- Savoir utiliser les touches des fonctions qui figurent au programme de la classe considérée et savoir programmer le calcul des valeurs d'une fonction d'une variable permis par ces touches ;
- Savoir programmer une instruction séquentielle ou conditionnelle et, en classe terminale, une instruction itérative, comportant éventuellement un test d'arrêt.

#### Classe de Terminale STI

#### 3. NOTIONS DE CALCUL INTEGRAL

##### d) Équations différentielles

Résolution de l'équation différentielle  $y' = ay$ , où  $a$  est un nombre réel : existence et unicité de la solution vérifiant une condition initiale donnée.

Résolution de l'équation différentielle  $y'' = \omega^2 y$  où  $\omega$  est un nombre réel : existence et unicité (admisses) de la solution vérifiant des conditions initiales données.

## Dossier 40-00 (suite)

Contenus	Modalités de mise en œuvre	Commentaires
Équations différentielles	Exemples simples d'étude de phénomènes continus satisfaisant à une loi d'évolution et à une condition initiale se ramenant à une équation du type $y' = ay$ ou $y'' = \omega^2 y$ .	Certaines de ces situations seront issues de sciences physiques (mécanique du point, circuits électriques...). Lorsqu'une telle étude mène à une équation avec second membre, la méthode à suivre pour se ramener à l'équation sans second membre doit être indiquée. D'autre part, dans certaines sections, en liaison avec l'enseignement d'autres disciplines, on pourra être amené à étudier d'autres types d'équations différentielles mais ceci est en dehors du programme de mathématiques.

## Classe de Terminale S

Contenus	Modalités de mise en œuvre	Commentaires
<b>Introduction de la fonction exponentielle</b>		
Étude de l'équation $f' = kf$ . Théorème : "il existe une unique fonction $f$ dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$ ." Relation fonctionnelle caractéristique. Introduction du nombre $e$ . Notation $e^x$ . Extension du théorème pour l'équation $f' = kf$ .	L'étude de ce problème pourra être motivée par un ou deux exemples, dont celui de la radioactivité traité en physique, ou par la recherche des fonctions dérivables $f$ telles que $f(x + y) = f(x)f(y)$ . On construira avec la méthode d'Euler introduite en première des représentations graphiques approchées de $f$ dans le cas $k=1$ ; on comparera divers tracés obtenus avec des pas de plus en plus petits. L'unicité sera démontrée. L'existence sera admise dans un premier temps. Elle sera établie ultérieurement à l'occasion de la quadrature de l'hyperbole. Approximation affine, au voisinage de 0, de $h \mapsto e^h$ .	Ce travail se fera très tôt dans l'année car il est central dans le programme de mathématiques et de physique. Il fournit un premier contact avec la notion d'équation différentielle et montre comment étudier une fonction dont on ne connaît pas une formule explicite. La méthode d'Euler fait apparaître une suite géométrique et donne l'idée que l'exponentielle est l'analogue continu de la notion de suite géométrique, ce que l'équation fonctionnelle confirme.