Dossier 39-1

Thème : Intégration
Utilisation du calcul intégral en mécanique, en physique, en biologie, en économie, en probabilités...

1. L'exercice proposé au candidat

Une population avec un taux de variation périodique.

Soit $N(t)$ la densité d'une population (par exemple de bactéries) à l'instant t, que l'on désire déterminer.

Dans un premier modèle différentiel, on suppose qu'il n'y a aucune interaction entre cette population et l'environnement, on fait l'hypothèse que la variation de la densité de population n'est dûe qu'à la densité de population et de plus qu'elle est proportionnelle à la densité de population. L'équation différentielle qui modélise le comportement de la population est donnée par:

$$N'(t) = a \cdot N(t) \tag{1}$$

où $a \in \mathbb{R}$ est une constante réelle donnée, qui représente une moyenne du taux de reproduction de l'espèce en l'absence d'interaction avec le milieu environnant.

Montrer que la solution générale de (1) est de la forme $N(t) = N(0)e^{a \cdot t}$ et que son comportement asymptotique dépend du signe de a.

Supposons par contre que le rapport entre la variation de la densité et la densité (c'est à dire le taux de variation de l'espèce) varie avec le temps. On peut par exemple supposer que la lumière puisse influencer le taux de reproduction et que l'on puisse le mesurer expérimentalement. On aura donc une nouvelle équation différentielle qui modélise le comportement de la population:

$$N'(t) = a(t) \cdot N(t). \tag{2}$$

On fera l'hypothèse que $a(\cdot)$ est continue. Montrer que la solution générale de (2) est de la forme $N(t) = N(0)e^{\int_0^t a(s)ds}$.

Soient $a(s) = s^\beta$ ($\beta \in \mathbb{R}$) pour $s > 1$ et $a(s) = 1$ pour $s \leq 1$ et $N(0) = 1$, si β est négatif, cela correspond à l'étude de l'effet d'une baisse de lumière sur la population.

Est-il possible de déterminer un seuil pour β pour rendre la densité de la population bornée (c'est-à-dire existe-il β_0 tel que, si $\beta < \beta_0$, il existe M tel que $N(t) \leq M$ pour tout $t \geq 0$)?

Plusieurs organismes vivants règlent leur système de reproduction sur le rythme des saisons ou de la journée, cela peut se traduire dans le modèle par le choix de la fonction $a(t)$ que l'on peut prendre périodique de période T. Choisissons par exemple $a(t) = \sin t + \alpha$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$ et $T = 2\pi$. Sous quelles conditions a-t-on des solutions bornées pour $t \geq 0$?

Si l'on ne connaît pas explicitement une primitive de a mais seulement une valeur approchée I de $\int_0^1 a(s)ds$ telle que $\epsilon = |I - \int_0^1 a(s)ds| \leq 10^{-2}$, avec quelle précision connaît-on la densité de la population au temps $t = 1$?

2. Le travail demandé au candidat

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury.

Après avoir résolu et analysé cet exercice le candidat indiquera sur sa fiche:

1. Les objectifs de cet exercice, les notions et les outils mathématiques utilisés pour sa résolution, ainsi que les niveaux auxquels chaque partie de l'énoncé s'adresse.

2. Le candidat pourra décrire une méthode numérique (ou plusieurs) pour approcher $\int_0^1 a(s)ds$ et déterminer l'influence de l'erreur sur l'intégrale sur $N(1)$.

3. Proposer deux autres exercices sur ce thème.