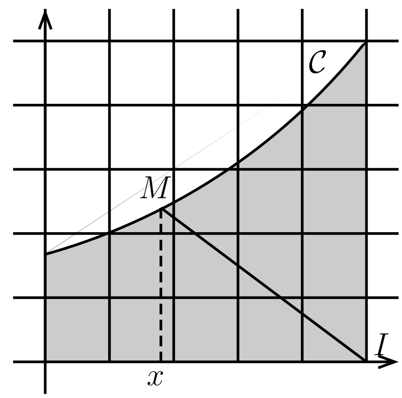
Thème : calcul intégral

L'exercice

Le plan est rapporté à un repère orthonormal. On note I le point de coordonnées $(1, 0)$. On considère une fonction f positive, strictement croissante et dérivable sur l'intervalle $[0, 1]$.
On a représenté ci-contre sa courbe représentative $\mathcal{C}$ sur l'intervalle $[0, 1]$ et on a mis en évidence le domaine Δ délimité par la courbe $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = 1$.
Le but du problème est de prouver l'existence d'un unique point A appartenant à $\mathcal{C}$ tel que le segment $[IA]$ partage Δ en deux régions de même aire.



Pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0, 1]$, on note $M(x, f(x))$ et (T_x) le domaine délimité par la droite (IM), l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la courbe $\mathcal{C}$.
On désigne par F la fonction définie sur l'intervalle $[0, 1]$ par $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ et par $g(x)$ l'aire du domaine T_x.

1. *Restitution organisée de connaissance.*
   Énoncer le théorème des valeurs intermédiaires.
2. a. Étudier les variations de la fonction g sur l'intervalle $[0, 1]$.

   b. Par des considérations d'aires, montrer que $g(0) \leqslant \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^1 f(t)dt$.

   c. Répondre au problème posé.

La réponse d'un élève

On considère que la fonction f est définie par $f(x) = e^{x-1}$, ce qui correspond à la figure fournie.
Alors l'aire de la portion de plan Δ vaut $\int_0^1 f(t)dt = \int_0^1 e^{t-1}dt = \left[e^{t-1}\right]_0^1 = 1 - \frac{1}{e}$ et l'aire du domaine T_x vaut $\int_0^x e^{t-1}dt$ plus l'aire d'un triangle. On obtient $e^{x-1} - e^{-1} + \frac{1}{2} \times (1 - x) \times e^{x-1}$
Il faut donc résoudre : $e^{x-1} - e^{-1} + \frac{1}{2} \times (1 - x) \times e^{x-1} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{e}\right)$, équation que je ne parviens pas à résoudre.

Le travail à exposer devant le jury

1- Analysez la production de l'élève en mettant en évidence sa démarche et les compétences acquises.

2- Proposez une correction de la question 2 telle que vous l'exposeriez devant une classe de terminale scientifique.

3- Présentez deux ou trois exercices sur le thème du *calcul intégral.*