Dossier 37-2 *Sujet 2011*

Thème : calcul intégral

L'exercice

Soit f la fonction définie sur $[0;1]$ par $f(x) = x(1-x^2)$.
On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
On note $\mathcal{D}$ l'ensemble des points $M(x;y)$ tels que : $0 \leqslant x \leqslant 1$ et $0 \leqslant y \leqslant x(1-x^2)$.

1) Calculer l'aire du domaine $\mathcal{D}$.
2) Existe-t-il une droite (Δ) passant par l'origine et partageant le domaine $\mathcal{D}$ en deux parties de même aire ?
   Toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

La réponse d'un élève à la question 2)

On veut couper la partie en deux parties de même aire donc $\frac{1}{8}$. *Une droite qui passe par l'origine a pour équation* $y = ax$.
Je cherche le point M *d'intersection avec la courbe :*

$$x(1-x^2) = ax$$

$$1 - x^2 = a$$

$$x^2 = 1 - a$$

$$x = \sqrt{1-a}$$

$$M\left(\sqrt{1-a}, a\sqrt{1-a}\right)$$

L'aire entre la courbe et la droite doit être égale à $\frac{1}{8}$ *donc :*

$$\int_0^{\sqrt{1-a}} x(1-x^2)\,dx - \int_0^{\sqrt{1-a}} ax\,dx = \frac{1}{8}$$

c'est trop compliqué, j'arrête.
Je vois que l'aire entre la courbe et la droite vaut 0 quand M *est en* O *et vaut* $\frac{1}{4}$ *quand* M *est en* $I(1;0)$ *donc forcément elle vaut* $\frac{1}{8}$ *à un moment.*

Le travail à exposer devant le jury

1- Analysez la production de l'élève. Quels sont selon vous ses acquis ? Sa démarche vous paraît-elle pertinente et quelles erreurs avez-vous repérées ?

2- En vous appuyant sur la démarche de l'élève, proposez une correction de la question 2) telle que vous l'exposeriez devant une classe de terminale scientifique.

3- Présentez deux ou trois exercices dont la résolution fait appel au calcul intégral.