Dossier 35-2

Thème : Encadrement d'intégrales

L'exercice

D'après Bac S, Antilles-Guyane, Septembre 2005.

Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{2\ell n\, x}{x^2 + x}$.

1) Montrer que, pour tout $x > 1$, $\dfrac{\ell n\, x}{x^2} \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{\ell n\, x}{x}$.

2)

a) Calculer $I = \displaystyle\int_2^4 \frac{\ell n\, x}{x}\, dx$ et $J = \displaystyle\int_2^4 \frac{\ell n\, x}{x^2}\, dx$.

b) En déduire un encadrement de $K = \displaystyle\int_2^4 f(x)\, dx$.

3) Soit $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère (unités graphiques : en abscisse 1 *cm* pour une unité, en ordonnés 4 *cm* pour une unité). On considère le domaine plan limité par l'axe des abscisses, la courbe $\mathcal{C}$ et les droites d'équations $x = 2$ et $x = 4$, et on note $\mathcal{A}$ son aire, en cm^2.
À l'aide de l'encadrement trouvé en 2.b., donner un encadrement de $\mathcal{A}$.

Le travail à exposer devant le jury

1- Quels sont les savoirs et les méthodes mis en jeu dans cet exercice ?

2- Modifier l'énoncé pour obtenir un nouvel encadrement de K en utilisant la comparaison entre les moyennes arithmétiques et géométriques de deux réels strictement positifs.

3- Proposer un ou plusieurs exercices ayant pour but l'encadrement d'une intégrale.

Dossier 35-2 *Corrigé*

Thème : Encadrement d'intégrales

1. On a d'une part
   - On sait que $x > 1 \Rightarrow \ln x > 0$. Comme $1 < x$, on a $x < x^2 \Rightarrow x + x^2 < 2x^2 \iff \dfrac{1}{2x^2} < \dfrac{1}{x+x^2} \iff \dfrac{2\ln x}{2x^2} < \dfrac{2\ln x}{x+x^2} \iff \dfrac{\ln x}{x^2} < f(x)$.
   - De même $1 < x \Rightarrow x < x^2 \Rightarrow 2x < x + x^2 \iff \dfrac{1}{x+x^2} < \dfrac{1}{2x} \Rightarrow \dfrac{2\ln x}{x+x^2} < \dfrac{2\ln x}{2x} \iff f(x) < \dfrac{\ln x}{x}$.

   D'où l'encadrement demandé.
2. (a) Comme $\dfrac{\ln x}{x} = \ln x \times \dfrac{1}{x}$, on reconnaît une forme uu' avec $u(x) = \ln x$, qui a pour primitive $\left[\dfrac{(\ln x)^2}{2}\right]$.

   On a donc $\mathrm{I} = \left[\dfrac{(\ln x)^2}{2}\right]_2^4 = \dfrac{3(\ln 2)^2}{2}$.

   Pour J, on intègre par parties en posant $\begin{cases} u(x) = \ln x & \mathrm{d}v(x) = \dfrac{1}{x^2} \\ \mathrm{d}u(x) = \dfrac{1}{x} & v(x) = -\dfrac{1}{x} \end{cases}$

   $\mathrm{J} = \left[-\dfrac{\ln x}{x}\right]_2^4 + \displaystyle\int_2^4 \dfrac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \left[-\dfrac{\ln x}{x} - \dfrac{1}{x}\right]_2^4 = \dfrac{1}{4}$.

   (b) De l'encadrement trouvé en 1, on en déduit, en intégrant entre 2 et 4 l'encadrement : $\mathrm{J} < \mathrm{K} < \mathrm{I} \iff \dfrac{1}{4} < \mathrm{K} < \dfrac{3(\ln 2)^2}{2}$.
3. L'unité d'aire vaut $1 \times 4 = 4$ cm^2. L'aire cherchée est donc le quadruple de l'intégrale K.

   Donc $\boxed{1 < \mathcal{A} < 6(\ln 2)^2}$ soit approximativement $1 < \mathcal{A} < 2,883$. (cm^2)