Dossier 35-1

Thème : Encadrement d'une intégrale à l'aide d'un encadrement de la fonction intégrée

L'exercice

L'objet de cet exercice est de donner des valeurs approchées de l'intégrale I :

$$I = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{e^{-t}}{1-t}\, dt$$

1) Vérifier que pour tout $t \neq 1$ on a l'égalité : $\dfrac{1}{1-t} = 1 + t + \dfrac{t^2}{1-t}$

2) Calculer l'intégrale $J = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} e^{-t}(1+t)\, dt$.

3) Montrer que pour tout réel t de l'intervalle $[0, \frac{1}{2}]$, $t^2 \leq \dfrac{t^2 e^{-t}}{1-t} \leq \dfrac{2t^2}{\sqrt{e}}$ et en déduire un encadrement de I.

Le travail à exposer devant le jury

1- Dégager l'idée clef sur laquelle repose la méthode utilisée dans cet exercice.

2- On remplace dans la question 2) de l'exercice l'intégrale J par $J = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} e^{-t}(1+t+t^2)\, dt$. Proposer alors une modification des questions 1) et 3) afin d'obtenir un encadrement de I plus fin que celui obtenu ici.

3- Construire l'énoncé d'un nouvel exercice qui conduise, à l'aide de la méthode précédente, au calcul des valeurs approchées de $\ell n(2)$ ou de $\frac{\pi}{4}$, au choix.

3- Proposer un autre exercice d'encadrement d'intégrale par une méthode de votre choix.