Dossier 34-1

Thème : Intégration
Calculs approchés d'une intégrale

1. L'exercice proposé au candidat

Calcul des valeurs approchées d'une intégrale

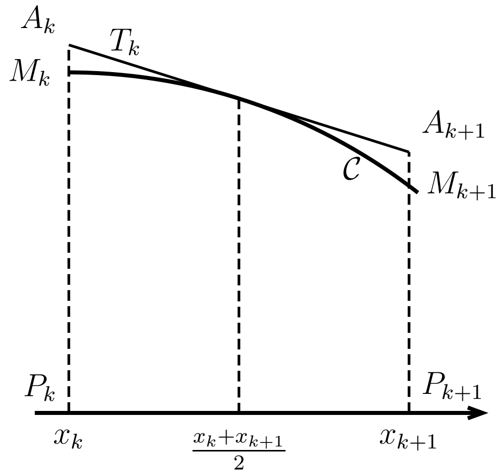
f est la fonction définie sur $[0,1]$ par : $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$.
On trace la représentation graphique de la fonction f dans un repère orthonormal, et on note C la courbe représentative de f. L'intégrale $I = \int_0^1 f(x)dx$ est l'aire du domaine situé sous la courbe. Dans la suite de l'activité, on établit un encadrement de I par des considérations d'aires.

Un encadrement de l'intégrale I

On subdivise l'intervalle $[0,1]$ en n intervalles ($n \in \mathbb{N}^*$) de même longueur $\frac{1}{n}$ à l'aide des réels :

$$x_0 = 0 \,;\, x_1 = \frac{1}{n} \,;\ldots\,;\, x_n = 1$$

Pour tout entier $k = 0; 1; \ldots; n-1$; on note T_k la tangente à la courbe C au point d'abscisse : $\frac{x_k + x_{k+1}}{2}$.
P_k, M_k, A_k désignent les points d'abscisse x_k qui sont situés respectivement sur l'axe des abscisses, la courbe C et la tangente T_k. B_{k+1} est le point de T_k d'abscisse x_{k+1}.



1. Démontrer que l'aire du trapèze $P_kA_kB_{k+1}P_{k+1}$ est égale à $\frac{1}{n}f(\frac{x_k + x_{k+1}}{2})$.

2. Vérifier que l'aire du trapèze $P_kM_kM_{k+1}P_{k+1}$ est égale à $\frac{1}{2n}(f(x_k) + f(x_{k+1}))$.
   On admet que sur chacun des intervalles $[x_k, x_{k+1}]$, l'aire du domaine situé sous la courbe est comprise entre les aires des trapèzes que nous venons de calculer.

3. Démontrer l'encadrement suivant de I :

$$\frac{1}{2n}\left[f(x_0) + 2f(x_1) + \ldots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)\right] \leq I \leq \frac{1}{n}\left[f(\frac{x_0 + x_1}{2}) + \ldots + f(\frac{x_{n-1} + x_n}{2})\right]$$

2. Le travail demandé au candidat

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury.

Après avoir résolu et analysé cet exercice :

1. Dégager les méthodes et les savoirs mis en jeu.

2. Discuter l'intérêt pédagogique de l'énoncé de cet exercice en justifiant le choix de cette fonction.

3. Quelles utilisations de la calculatrice peut-on faire pour donner des valeurs approchées de I ?

4. Donner un exercice utilisant une autre méthode de votre choix pour obtenir une valeur approchée d'une intégrale.