Thème : Calcul d'intégrales par des méthodes variées

1. L'exercice proposé au candidat

L'objectif de cet exercice est de déterminer une primitive de la fonction ln à partir d'un calcul d'aire. On suppose connue la fonction exp et la fonction ln est définie comme réciproque de cette fonction.

1) Soit f une fonction continue et strictement croissante sur un intervalle I. Le plan est rapporté à un repère orthonormal. Démontrer que les courbes représentatives des fonctions f et f^{-1} sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.
2) Soit x un réel strictement supérieur à 1. En utilisant les courbes représentatives des fonctions ln et exp, calculer $\displaystyle\int_1^x \ln t \, \mathrm{d}t$. En déduire une primitive de la fonction ln sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

2. Le travail demandé au candidat

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le Jury

Pendant sa préparation, le candidat traitera les questions suivantes :

$Q.1)$ énoncer les propriétés utilisées pour résoudre cet exercice ;

$Q.2)$ rédiger pour des élèves de terminale S un corrigé de la question 2).

Sur ses fiches, le candidat rédigera et présentera :

a) sa réponse à la question $Q.2)$;
b) d'autres exercices sur le thème « **Calcul d'intégrales par des méthodes variées** ».

3. Quelques références aux programmes

Contenus	Modalités de mise en œuvre	Commentaires
Intégration		
Pour une fonction f continue positive sur $[a, b]$, introduction de la notation $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ comme aire sous la courbe. Valeur moyenne d'une telle fonction.	On indiquera que l'aire sous la courbe peut être approchée en l'encadrant par deux suites adjacentes construites en quadrillant le plan de plus en plus finement. Exemple où la fonction intégrée est en escalier. Exemple de la parabole : on fera apparaître l'intégrale comme limite de sommes et on admettra que cette situation est généralisable.	Les élèves ont une notion intuitive d'aire (avec la propriété d'additivité) et savent calculer certaines aires élémentaires ; l'objectif est de leur donner un aperçu de la définition et du calcul de l'aire de domaines plans liés aux fonctions ; tout développement théorique est exclu.
Extension à l'intégrale et à la valeur moyenne d'une fonction de signe quelconque.	On indiquera la convention de signe sur un intervalle où f est négative et on en déduira le cas général ; on pourra aussi ajouter une constante à f pour la rendre positive.	Cette extension doit être faite brièvement. Cette convention de signe prendra tout son sens lors de l'étude de $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.
[...]	[...]	[...]
Intégration et dérivation		
Notion de primitive. Théorème : « si f est continue sur un intervalle I, et si a est un point de I, la fonction F telle que $F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ est l'unique primitive de f sur I s'annulant en a »	On démontrera que F est une primitive de f dans le cas où f est continue et croissante, et on admettra le cas général.	L'intégration permet d'établir l'existence des primitives des fonctions continues et d'en donner des méthodes numériques de calcul ; inversement, la connaissance d'une primitive d'une fonction continue donne une formule explicite pour le calcul des intégrales : les élèves devront percevoir l'intérêt de cette double démarche.
Calcul de $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ à l'aide d'une primitive de f.	Tableau primitives-dérivées des fonctions usuelles (fonctions $x \mapsto x^n$, $x \mapsto \sqrt{x}$, $x \mapsto \ln x$, $x \mapsto \mathrm{e}^x$, sinus, cosinus). Application de la dérivation des fonctions composées à la primitivation de u'/u, $u'\mathrm{e}^u$, $u'u^n$.	L'existence d'une solution de $y' = f(t)$, admise en 1ère est ainsi justifiée ; de même, est justifiée l'existence du logarithme : celle de sa fonction réciproque en découle alors. La volonté d'introduire rapidement la fonction exponentielle pour la physique aura conduit à admettre un théorème d'existence en début d'année, qui se trouve ici justifié.
Intégration par parties.		On se limitera à des cas simples où l'élève aura à trouver lui-même le recours à la technique d'intégration par parties.