Thème : Intégration

L'exercice

On considère la fonction numérique f de la variable réelle x définie sur l'intervalle $[0, +\infty[$ par :

$$f(x) = \sqrt{x}e^{1-x}$$

1) On considère la fonction F définie sur $[1, +\infty[$ par $F(x) = \displaystyle\int_1^x f(t)\,dt$

1.a) Démontrer que, pour tout réel t positif on a : $t + 2 \geq 2\sqrt{2}\sqrt{t}$

1.b) En déduire que, pour tout $x \in [1, +\infty[$, on a : $F(x) \leq \dfrac{1}{2\sqrt{2}} \displaystyle\int_1^x (t+2)e^{1-t}dt$

1.c) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que, pour tout $x \in [1, +\infty[$, on a :

$$\int_1^x (t+2)e^{1-t}dt = 4 - (x+3)e^{1-x}$$

1.d) En déduire que, pour tout $x \in [1, +\infty[$, on a : $0 \leq F(x) \leq \sqrt{2}$.

2) On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n non nul par :

$$u_n = \int_n^{n+1} f(t)\,dt$$

Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on note S_n la somme des $n-1$ premiers termes de la suite (u_n). Exprimer S_n à l'aide d'une intégrale. Montrer que la suite (S_n) converge et donner un encadrement de sa limite.

Le travail à exposer devant le jury

1- Dégager les méthodes et savoirs mis en jeu dans l'exercice.

2- Présenter une solution de la question 2).

3- Proposer un ou plusieurs exercices se rapportant au thème **"Intégration"**.