

Thème : Intégration

1. L'exercice proposé au candidat

On considère la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$f(x) = \sqrt{x} e^{1-x}.$$

1) Donner le tableau de variation de f et tracer l'allure de sa représentation graphique dans un repère orthonormal.

2) On considère la fonction F définie sur $[1, +\infty[$ par :

$$F(x) = \int_1^x f(t) dt.$$

a) Démontrer que pour tout réel t positif, on a : $2\sqrt{2}\sqrt{t} \leq t + 2$.

b) En déduire que pour tout réel x appartenant à $[1, +\infty[$ on a :

$$0 \leq F(x) \leq \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(4 - (x+3)e^{1-x} \right).$$

c) En déduire que pour tout réel x appartenant à $[1, +\infty[$ on a : $0 \leq F(x) \leq \sqrt{2}$.

3) La fonction F admet-elle une limite en $+\infty$?

2. Le travail demandé au candidat

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury.

Le candidat rédigera sur ses fiches :

- ◇ sa réponse à la question 2)b) ;
- ◇ un ou plusieurs exercices sur le thème « **Intégration** ».

Le candidat présentera au jury :

- le contenu de ses fiches ;
- les méthodes et les savoirs mis en jeu dans l'exercice.

3. Quelques références aux programmes

Programme de Terminale S

Contenus	Modalités de mise en œuvre	Commentaires
Intégration		
<p>Pour une fonction f continue positive sur $[a, b]$, introduction de la notation $\int_a^b f(x) dx$ comme aire sous la courbe. Valeur moyenne d'une telle fonction.</p> <p>Extension à l'intégrale et à la valeur moyenne d'une fonction de signe quelconque.</p>	<p>On indiquera que l'aire sous la courbe peut être approchée en l'encadrant par deux suites adjacentes construites en quadrillant le plan de plus en plus finement. Exemple où la fonction intégrée est en escalier. Exemple de la parabole : on fera apparaître l'intégrale comme limite de sommes et on admettra que cette situation est généralisable.</p> <p>On indiquera la convention de signe sur un intervalle où f est négative et on en déduira le cas général ; on pourra aussi ajouter une constante à f pour la rendre positive.</p>	<p>Les élèves ont une notion intuitive d'aire (avec la propriété d'additivité) et savent calculer certaines aires élémentaires ; l'objectif est de leur donner un aperçu de la définition et du calcul de l'aire de domaines plans liés aux fonctions ; tout développement théorique est exclu.</p> <p>Cette extension doit être faite brièvement. Cette convention de signe prendra tout son sens lors de l'étude de $\int_a^b f(x) dx$.</p>
Intégration et dérivation		
<p>Notion de primitive. Théorème : « si f est continue sur un intervalle I, et si a est un point de I, la fonction F telle que $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ est l'unique primitive de f sur I s'annulant en a ».</p> <p>Calcul de $\int_a^b f(x) dx$ à l'aide d'une primitive de f.</p> <p>Intégration par parties.</p>	<p>On démontrera que F est une primitive de f dans le cas où f est continue et croissante, et on admettra le cas général.</p> <p>Tableau primitives-dérivées des fonctions usuelles (fonctions $x \mapsto x^n$, $x \mapsto \sqrt{x}$, $x \mapsto \ln x$, $x \mapsto e^x$, sinus, cosinus). Application de la dérivation des fonctions composées à la primitivation de u'/u, $u'e^u$, $u'u^n$.</p>	<p>L'intégration permet d'établir l'existence de primitives des fonctions continues et d'en donner des méthodes numériques de calcul ; inversement, la connaissance d'une primitive d'une fonction continue donne une formule explicite pour le calcul des intégrales : les élèves devront percevoir l'intérêt de cette double démarche.</p> <p>L'existence d'une solution de $y' = f(t)$, admise en 1^{re} est ainsi justifiée ; de même, est justifiée l'existence du logarithme : celle de sa fonction réciproque en découle alors. La volonté d'introduire rapidement la fonction exponentielle pour la physique aura conduit à admettre un théorème d'existence en début d'année, qui se trouve ici justifié.</p> <p>On se limitera à des cas simples où l'élève aura à trouver lui-même le recours à la technique d'intégration par parties.</p>