Dossier 31-1

Thème : Fonctions
Fonctions de référence et fonctions associées

1. L'exercice proposé au candidat

1 - f est la fonction définie sur $I = [-2\,;4]$ par : $f(x) = \dfrac{2x-1}{x+3}$.

a - Trouver les réels a et b tels que pour tout x dans I : $f(x) = a + \dfrac{b}{x+3}$.

b - Etudier le sens de variation de f sur I.

c - Montrer que f est bornée sur I.

d - Tracer, dans un repère orthonormal, la courbe $\mathcal{C}_f$ représentative de f.

2 - g est la fonction définie sur $J = [-5\,;1]$ par : $g(x) = \dfrac{3x+1}{2-x}$.

a- Trouver les réels α et β tels que pour tout x dans J : $g(x) = \alpha + \dfrac{\beta}{2-x}$.

b - Etudier le sens de variation de g sur J, et montrer que g est bornée sur J.

c - Tracer, sur le même graphique, la courbe $\mathcal{C}_g$ représentative de g.

3 - Montrer que $g \circ f$ est définie sur I. Calculer $(g \circ f)(x)$.

4 - De même, vérifier que $f \circ g$ est définie sur J. Calculer $(f \circ g)(x)$.

5 - Tracer, toujours sur le même graphique, la droite $\triangle$ d'équation $y = x$.
Observer alors la position de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ par rapport à $\triangle$.

2. Le travail demandé au candidat

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury.

Après avoir résolu et analysé cet exercice :

- Dégager les notions et les outils utilisés pour la résolution de l'exercice et le (ou les niveaux) au(x)quel(s) s'adresse cet énoncé.
- Peut-on adapter cet exercice au cas où f est une fonction homographique quelconque ?
- Proposer un exercice portant sur l'étude d'un polynôme du second degré utilisant les fonctions de référence et les fonctions associées.