

Thème : Fonctions
Encadrement d'une fonction par des fonctions simples

1. L'exercice proposé au candidat

1) On considère les fonctions f et g définies sur \mathbb{R}_+ par:

$$f(x) = \ln(1+x) - x \quad \text{et} \quad g(x) = \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}.$$

a) Etudier les variations de ces deux fonctions.

b) En déduire l'encadrement suivant :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x.$$

2) Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x.$$

3) En déduire que, pour tout $x \in [0, \pi]$,

$$x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \leq \ln(1 + \sin x) \leq x.$$

2. Le travail demandé au candidat

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury.

Pendant sa préparation, le candidat traitera les questions suivantes :

Q.1) Décrire les outils utilisés pour résoudre cet exercice.

Q.2) Donner l'interprétation géométrique de la deuxième inégalité de la question 1)b).

Q.3) Donner des applications de cet exercice portant sur un calcul de limite.

Sur ses fiches, le candidat rédigera et présentera :

- Sa réponse à la question Q.3)

- Un autre énoncé d'exercice portant sur le thème "Encadrement d'une fonction par des fonctions simples".