

Thème : optimisation

L'exercice

À partir de l'extrait de manuel donné ci-dessous, un professeur a proposé l'exercice suivant à ses élèves.

1. Construire à l'aide d'un logiciel un triangle ABC de hauteur $[AH]$, où H est sur le segment $[BC]$, tel que $AH = 4$, $CH = 3$ et $BH = 4$.
2. a) Placer un point M sur le segment $[AC]$, et afficher la longueur BM .
b) Chercher pour quelle position du point M la distance BM est minimale. Quelle est alors la nature du triangle ABM ? Pouvaient-on le prévoir ?
3. Déterminer la valeur exacte de la distance AM lorsque BM est minimale.

D'après le manuel Symbole seconde (Belin 2010)

On se place dans un triangle ABC . On désigne par H le pied de la hauteur issue de A , et on suppose que $AH = 4$ cm, $CH = 3$ cm et $BH = 4$ cm. Par un point M du segment $[AC]$, on fait passer une droite parallèle à (AH) qui coupe (CH) en N . On désigne par x la longueur du segment $[AM]$ (en centimètres).

1. a) Calculer la longueur AC .
b) Quelles sont les valeurs possibles de la variable x ?
c) Exprimer la longueur CM en fonction de x .
2. a) Démontrer, grâce au théorème de Thalès, que $MN = 4 - \frac{4}{5}x$.
b) Démontrer, grâce au théorème de Thalès, que $CN = 3 - \frac{3}{5}x$.
3. En utilisant le théorème de Pythagore, démontrer que : $MB^2 = x^2 - \frac{8}{5}x + 32$.
4. À l'aide d'un tableur ou d'une calculatrice, déterminer les valeurs de MB^2 lorsque x varie de 0 à 5 de 0,1 en 0,1. Quelle semble être la valeur de x qui rend la quantité MB^2 minimale ?
5. Démontrer, en la développant, l'expression suivante : $MB^2 = \left(x - \frac{4}{5}\right)^2 + \frac{784}{25}$.
6. On pose, pour $x \in [0; 5]$: $f(x) = \left(x - \frac{4}{5}\right)^2 + \frac{784}{25}$.
a) Déterminer le tableau de variation de f .
b) En quelle valeur de x la fonction f atteint-elle son minimum ? Que vaut ce minimum ?
c) En déduire la valeur exacte de la distance AM lorsque BM est minimale.

Le travail à exposer devant le jury

- 1- Comparez les compétences mobilisées dans chacune des deux versions de l'exercice.
- 2- Exposez une correction de la question 6 de l'exercice du manuel tel que vous le feriez devant une classe de seconde.
- 3- Proposez deux ou trois exercices sur le thème *optimisation*.