

## Thème : optimisation

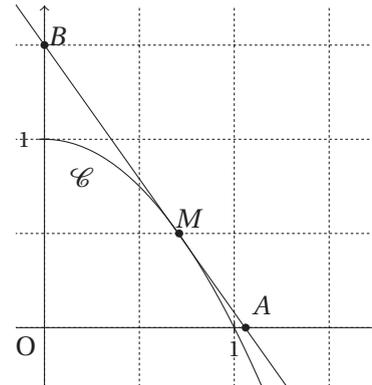
## L'exercice

On considère la fonction  $f$  définie sur  $[0; +\infty[$  par :

$$f(x) = 1 - x^2.$$

On note  $\mathcal{C}$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

La tangente à la courbe  $\mathcal{C}$  au point  $M$  de coordonnées  $(a; f(a))$ , avec  $0 < a \leq 1$ , coupe l'axe  $(Ox)$  en  $A$  et l'axe  $(Oy)$  en  $B$ .



Existe-t-il une position du point  $M$  sur la courbe  $\mathcal{C}$  rendant l'aire du triangle  $MBO$  maximale ?

## Les démarches de trois élèves de première scientifique

## Élève 1

*Dans un logiciel de géométrie dynamique, j'ai tracé la courbe représentative de la fonction  $f$ .*

*J'ai créé un curseur de 0 à 1 puis placé le point  $M$  de coordonnées  $(a; f(a))$ .*

*J'ai ensuite tracé la tangente en  $M$  puis créé le triangle  $OBM$ .*

*En faisant varier le curseur je constate que l'aire du triangle est maximale lorsque  $M$  est en  $A$ .*

## Élève 2

*L'aire d'un triangle est égale à la moitié de la base multipliée par la hauteur.*

*Dans le triangle  $MBO$ , la hauteur associée à la base  $OB$  est maximale lorsque  $M$  a pour abscisse 1.*

*L'aire du triangle  $OBM$  est donc maximale pour  $a = 1$  et vaut alors  $\frac{1}{2} \times 1 \times 1,5 = 0,75$ .*

## Élève 3

*L'équation de la tangente au point d'abscisse  $a$  est donnée par  $y = f'(a)(x - a) + f(a)$ .*

*On a  $f(a) = 1 - a^2$  et  $f'(a) = -2a$  ce qui donne  $y = -2ax + 2a^2$ .*

*Pour  $a = 1$ , on obtient  $y = -2x + 2$ . Le point  $B$  a donc pour ordonnée 2.*

*Le triangle  $MBO$  a pour aire  $\frac{1}{2} \times 2 \times 1 = 1$ , ce qui représente son aire maximale.*

## Le travail à exposer devant le jury

- 1 - Analysez la production de chacun de ces élèves en précisant les compétences mises en jeu et en indiquant comment vous pourriez les aider à corriger leurs erreurs éventuelles.
- 2 - Proposez une correction de l'exercice telle que vous l'exposeriez devant une classe de première scientifique.
- 3 - Présentez deux exercices sur le thème *optimisation*. Vous prendrez soin de motiver vos choix.