

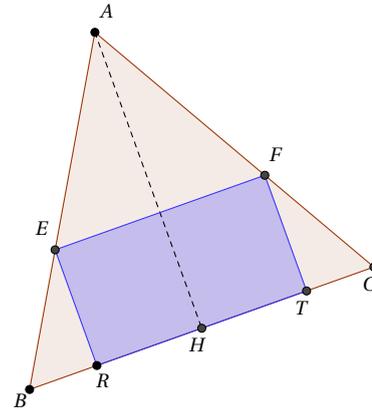
Thème : problèmes d'optimisation

## L'exercice

On considère un rectangle inscrit dans un triangle équilatéral de côté 18 cm comme représenté sur la figure ci-contre. On souhaite que ce rectangle ait la plus grande aire possible.

On désigne par  $H$  le pied de la hauteur issue de  $A$  dans le triangle  $ABC$ .

Où faut-il placer le point  $R$  pour que l'aire du rectangle  $REFT$  soit maximale ?



## Les réponses de trois élèves de seconde

## Élève 1

Je pose  $x = RH$ .

D'après le théorème de Thalès dans le triangle  $HBA$  :  $\frac{BR}{BH} = \frac{ER}{AH}$  donc  $\frac{9-x}{9} = \frac{ER}{h}$ .

Le calcul de  $h$  donne :  $h = \sqrt{18^2 - 9^2} = \sqrt{243} = 9\sqrt{3}$ . On obtient  $ER = 9\sqrt{3} \times \frac{9-x}{9} = \sqrt{3}(9-x)$ .

L'aire est :  $A = \sqrt{3} \times 2x(9-x)$ .

En affichant à la calculatrice la fonction  $f(x) = x(9-x) \times 2\sqrt{3}$ , j'obtiens en lisant dans la table des valeurs un maximum en  $x = 4$  et  $x = 5$ .

## Élève 2

À l'aide d'un logiciel, j'ai construit la figure. Je cherche ensuite la plus grande aire possible.

En déplaçant le point  $R$  sur le côté du triangle, j'obtiens  $BR = 4,48$  environ pour un maximum de l'aire.

Il nous faut donc placer le point  $R$  à 4,48 du point  $B$ .

## Élève 3

J'ai calculé l'aire du rectangle pour  $BR=1$  cm :  $h = 18 \frac{\sqrt{3}}{2} = 9\sqrt{3}$  et  $BH=9$ cm.

Dans le triangle  $ABH$  :  $\frac{BR}{BH} = \frac{ER}{h}$ . Donc  $\frac{1}{9} = \frac{ER}{9\sqrt{3}}$  d'où  $ER = \sqrt{3}$  et  $A = \ell \times L = 2 \times \sqrt{3} \times \sqrt{3} \approx 27,7$  cm<sup>2</sup>.

De même, pour  $BR = 2$  cm,  $A = 2 \times 7 \times 2\sqrt{3} \approx 48,5$  cm<sup>2</sup> ; pour  $BR = 3$  cm,  $A \approx 62,4$  cm<sup>2</sup>.

Pour  $BR = 4$  cm et pour  $BR = 5$  cm, je trouve 69,28 cm<sup>2</sup> puis cela diminue.

Le maximum est donc obtenu pour une valeur de  $BR$  entre 4 cm et 5 cm.

## Le travail à exposer devant le jury

- 1- Analysez la démarche de chaque élève en mettant en évidence leurs compétences en termes de conjecture et de démonstration.
- 2- Présentez une correction de l'exercice telle que vous l'exposeriez devant une classe de seconde.
- 3- Proposez deux problèmes d'optimisation. Vous motiverez vos choix en indiquant les compétences que vous souhaitez développer chez les élèves.