Dossier 27-1

Thème : Fonctions
Etude de recherche d'extremum et d'optimisation

1. L'exercice proposé au candidat

1) Pour tout réel α de $]0,2[$, on considère la fonction $x \mapsto g_\alpha(x) = \sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-(x+\alpha)^2}$.

   a) Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}_\alpha$ de g_α.
   Montrer que la courbe représentative de g_α possède un axe de symétrie vertical.

   b) Montrer que pour tout x de $\mathcal{D}_\alpha$, on a $g''_\alpha(x) < 0$.
   En déduire que g_α admet un unique maximum en $x_0 = -\dfrac{\alpha}{2}$.

2) En utilisant g_α, montrer que l'aire maximale d'un trapèze de hauteur α (avec $0 < \alpha < 2$) inscrit dans un cercle de rayon 1 est égale à $\alpha\sqrt{4-\alpha^2}$ (en unités d'aire).

2. Le travail demandé au candidat

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury

Pendant sa préparation, le candidat traitera la question suivante :

Q.1) Dégager les méthodes et les savoirs mis en jeu dans l'exercice.

Q.2) Utiliser la calculatrice pour vérifier les résultats des questions 1 et 2 (sans que cela se substitue aux calculs « à la main »).

Q.3) Quelle suite pourriez-vous donner à la question 2) ?

Sur ses fiches, le candidat rédigera et présentera :

– Sa réponse à la question Q.3).
– Deux exercices sur thème « **problèmes d'optimisation** ».

3. Quelques références aux programmes

Classe de Première S

Contenus	**Modalités de mise en oeuvre**	**Commentaires**
Dérivation		
Approche cinématique ou graphique du concept de nombre dérivé d'une fonction en un point.	Plusieurs démarches sont possibles : passage de la vitesse moyenne à la vitesse instantanée pour des mouvements rectilignes suivant des lois horaires élémentaires (trinôme du second degré dans un premier temps) ; zooms successifs sur une représentation graphique obtenue à l'écran de la calculatrice.	On ne donnera pas de définition formelle de la notion de limite. Le vocabulaire et la notation relatifs aux limites seront introduits sur des exemples puis utilisés de façon intuitive.
Nombre dérivé d'une fonction en un point : définition comme limite de $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ quand h tend vers 0. Fonction dérivée.		Dans les cas usuels, la limite de $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ s'obtient,après transformation d'écriture, en invoquant des arguments très proches de l'intuition. On ne soulèvera aucune difficulté à leur propos et on admettra tous les résultats utiles.
Tangente à la courbe représentative d'une fonction f dérivable ; approximation affine associée de la fonction.	On construira point par point un ou deux exemples d'approximation de courbe intégrale définie par : $y' = f(t)$ et $y(t_0) = y_0$ en utilisant l'approximation $\Delta f \approx f'(a)\Delta t$.	
Dérivée des fonctions usuelles : $\mapsto x^n$, $x \mapsto \sqrt{x}$,$x \mapsto \cos x$ et $x \mapsto \sin x$. Dérivée d'une somme, d'un produit, d'un quotient et de $x \mapsto f(ax+b)$.	On justifiera le résultat donnant la dérivée de uv et $1/u$.	On pourra admettre les dérivées des fonctions sinus et cosinus.
Lien entre signe de la dérivée et variations.	On étudiera, sur quelques exemples, le sens de variation de fonctions polynômes de degré 2 ou 3, de fonctions homographiques ou de fonctions rationnelles très simples. On introduira les notions et le vocabulaire usuels (extremum, majorant, minorant) et, de l'étude du sens de variations, on déduira des encadrements d'une fonction sur un intervalle.	On justifiera que la dérivée d'une fonction monotone sur un intervalle est de signe constant ; on admettra la réciproque. L'étude de fonctions ne sera pas présentée comme une fin en soi, mais interviendra lors de la résolution de problèmes.